

# 多用户 MIMO 系统中基于单天线功率约束的功率分配方法

韩圣千, 杨晨阳

(北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 针对多用户多输入多输出 (MIMO) 系统, 研究了单天线功率约束下的低复杂度功率分配方法。基于迫零预编码算法, 通过理论分析指出, 在单天线功率约束下使多用户和数据率最大化的最优功率分配具有多水平面灌水结构, 由此证明了单天线功率约束与多天线加权和功率约束之间的等价关系, 并提出了一种低复杂度功率分配方法。仿真结果表明, 所提出的功率分配方法的性能优于现有的等功率分配和启发式方法, 与最优功率分配方法相比, 能够以很小的性能损失为代价有效地降低计算复杂度。

**关键词:** 多用户 MIMO 系统; 单天线功率约束; 功率分配; 迫零预编码

中图分类号: TN914

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2012)10-0071-06

## Power allocation under per-antenna power constraints in multiuser MIMO systems

HAN Sheng-qian, YANG Chen-yang

(School of Electronics and Information Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** A low-complexity power allocation algorithm was investigated under per-antenna power constraints (PAPC) in multiuser multiple-input multiple-output (MIMO) systems. It was shown that the optimal power allocation subject to PAPC, aimed at maximizing the sum rate of multiple users with zero forcing (ZF) precoders, had the structure of water-filling with multiple water-levels. Based on this result, the equivalence between PAPC and weighted sum power constraints was proved and a low-complexity suboptimal power allocation method was then proposed. Simulation results show that the proposed method outperforms the existing equal power allocation method and the heuristic method, and it can efficiently reduce the computational complexity with a negligible performance loss compared with the optimal power allocation method.

**Key words:** multiuser MIMO systems; per-antenna power constraints; power allocation; zero forcing precoder

### 1 引言

在多用户多输入多输出 (MU-MIMO, multiuser multiple-input multiple-output) 系统中, 脏纸编码 (DPC) 是能够实现广播信道容量的最优预编码<sup>[1]</sup>。但是由于 DPC 需要进行复杂的矢量编码, 且通常要

求很大的编码长度, 因此具有很高的计算复杂度<sup>[2]</sup>。迫零 (ZF, zero forcing) 预编码是一种被广泛应用的次优 MU-MIMO 发射方案, 能够以很低的计算复杂度消除多用户之间的干扰<sup>[3-5]</sup>。当系统的总用户数很大时, 文献[6]的研究结果表明, 基于多天线总发射功率受限 (SPC, sum power constraints) 的 ZF

收稿日期: 2011-08-10; 修回日期: 2012-08-20

基金项目: 新一代宽带无线移动通信网科技重大专项基金资助项目 (2011ZX03003-001); 中国博士后科学基金资助项目 (20110490271)

**Foundation Items:** The National Key Project of Next Generation Wideband Wireless Communication Networks (2011ZX03003-001); China Postdoctoral Science Foundation (20110490271)

预编码可以渐近达到 DPC 的性能。文献[7]进一步证明了当考虑单天线功率约束 (PAPC, per-antenna power constraints) 时, ZF 预编码仍然可以达到渐近最优的性能。

在无线通信系统中, 考虑 PAPC 比 SPC 更具有实际意义<sup>[4, 5, 7, 8]</sup>。一方面, 由于在实际系统中每个天线的射频链路均存在独立的功率放大器, 因此每个天线的发射功率都独立地受限于各自功率放大器的线性区间。另一方面, PAPC 是未来通信系统的重要特征。分布式天线技术和多基站协作技术是未来无线通信系统保证蜂窝小区均匀覆盖的重要候选技术<sup>[4, 5]</sup>。对于在地理位置上散布的多个天线和多个基站, 它们的发射功率不可能互相共享, 因此这 2 种技术是单天线功率约束的典型应用场景。

为了保证 ZF 预编码满足一定的发射功率约束, 系统需要基于 ZF 波束形成矩阵对多用户进行功率分配。基于 SPC, 最优功率分配具有灌水 (water-filling) 结构, 并且只包含一个水平面变量。文献[7]研究了基于 PAPC 的功率分配方法, 指出以最大化多用户和数据率为准则的功率分配问题是一个凸优化问题, 可以通过多种优化方法进行数值求解 (例如内点法<sup>[9]</sup>), 但是其计算复杂度随着变量维数的增加而快速增长。为了降低功率分配的复杂度, 文献[10]提出了一种启发式方法。它首先假设基于 PAPC 的功率分配仍具有单水平面的灌水结构, 然后通过适当地选择水平面变量以保证所有的天线均满足 PAPC。文献[11]提出了更简单的等功率分配方法 (EPA, equal power allocation), 并指出在最大化多用户的最小数据率准则下 EPA 是最优的功率分配方案。与最优的功率分配方法相比, 启发式方法和 EPA 有效地降低了计算复杂度, 但是其性能与最优性能之间存在较大的差距。

本文基于 ZF 预编码, 以最大化多用户和数据率为准则, 提出一种新的低复杂度功率分配方法。首先证明基于 PAPC 的最优功率分配仍具有灌水结构, 但是包含多个水平面变量; 然后提出一种次优方法来获得这些水平面变量。仿真结果表明, 所提出方法的性能优于现有的启发式方法和 EPA, 能够以较低的计算复杂度获得接近最优功率分配的性能。

本文所采用的数学符号定义如下: 黑体大写、黑体小写和正常小写字母分别表示矩阵、行向量和标量,  $(\cdot)^T$  和  $(\cdot)^H$  分别表示对矩阵或向量进行转置和

共轭转置,  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵,  $\mathbf{1}$  表示全 1 向量,  $\text{diag}(\mathbf{x})$  表示以向量  $\mathbf{x}$  为对角元素的对角矩阵。

## 2 系统模型

考虑一个下行链路多用户 MIMO 系统, 其中装有  $M$  个天线的基站通过空分复用方式服务  $K$  个单天线用户。对于 ZF 预编码, 用户  $k$  的波束形成向量  $\mathbf{g}_k$  需要满足

$$\mathbf{h}_j \mathbf{g}_k^H = 0, \quad j \neq k \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{h}_j$  是用户  $j$  的下行信道向量, 其维数为  $1 \times M$ 。满足式(1)的 ZF 预编码并不唯一, 其中比较常用的是基于信道矩阵伪逆的 ZF 预编码。由此, 用户  $k$  的接收信噪比和可达数据率分别为

$$\gamma_k = \frac{|\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k^H|^2 p_k}{\sigma^2} \quad (2)$$

$$R_k = \log \left( 1 + \frac{|\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k^H|^2 p_k}{\sigma^2} \right) = \log \left( 1 + \frac{p_k}{\sigma_k^2} \right) \quad (3)$$

其中,  $p_k$  是基站分配给用户  $k$  的发射功率,  $\sigma^2$  是用户端的加性白高斯噪声的方差,  $\sigma_k^2 = \sigma^2 / |\mathbf{h}_k \mathbf{g}_k^H|^2$ 。

定义基站端的发射波束形成矩阵和功率分配矩阵分别为  $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1^H, \dots, \mathbf{g}_K^H]$  和  $\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{p})$ , 其中,  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_K]$ , 则基站端的发射预编码为  $\mathbf{W} = \mathbf{G}\mathbf{P}^{\frac{1}{2}}$ 。定义矩阵  $\mathbf{G}$  的第  $m$  行第  $k$  列元素为  $g_{mk}$ , 可得基站端第  $m$  个天线的发射功率为

$$\sum_{k=1}^K |g_{mk}|^2 p_k = \mathbf{b}_m \mathbf{p}^T \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{b}_m = [|g_{m1}|^2, \dots, |g_{mK}|^2]$ 。因此, 基于 PAPC 和 ZF 预编码, 以最大化多用户和数据率为准则的功率分配问题可以建模为

$$\max_{\mathbf{p}} \sum_{k=1}^K \log \left( 1 + \frac{p_k}{\sigma_k^2} \right) \quad (5a)$$

$$s.t. \quad \mathbf{a}_m \mathbf{p}^T \leq 1, m = 1, \dots, M \quad (5b)$$

$$p_k \geq 0, k = 1, \dots, K$$

其中,  $\mathbf{a}_m = \frac{M}{P} \mathbf{b}_m$ ,  $P$  是基站的总发射功率, 且每个天线具有相同的发射功率约束  $\frac{P}{M}$ 。

## 3 最优多水平面灌水功率分配

式(5)给出的功率分配问题是由凸目标函数和

线性约束构成的凸问题, 其拉格朗日方程可以表示为

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = -\sum_{k=1}^K \log\left(1 + \frac{p_k}{\sigma_k^2}\right) + \mathbf{u}(\mathbf{A}\mathbf{p}^T - \mathbf{I}^T) - \mathbf{v}\mathbf{p}^T \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_M]$  和  $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_K]$  是对偶变量,

$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_M^T]^T$ , 其第  $m$  行第  $k$  列元素为  $a_{mk}$ 。

最优的  $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  应满足以下 KKT 条件:

$$p_k \geq 0, \quad k=1, \dots, K \quad (7)$$

$$u_m \geq 0, \quad m=1, \dots, M \quad (8)$$

$$v_k \geq 0, \quad k=1, \dots, K \quad (9)$$

$$u_m (\mathbf{a}_m \mathbf{p}^T - 1) = 0, \quad m=1, \dots, M \quad (10)$$

$$v_k p_k = 0, \quad k=1, \dots, K \quad (11)$$

$$-\frac{1}{\sigma_k^2 + p_k} + \sum_{m=1}^M u_m a_{mk} - v_k = 0, \quad k=1, \dots, K \quad (12)$$

式(12)可以重新表示为

$$p_k = \frac{1}{\sum_{m=1}^M u_m a_{mk} - v_k} - \sigma_k^2 \quad (13)$$

联合式(7)、式(9)、式(11)和式(13), 不难得到最优功率分配具有以下灌水结构:

$$p_k = \left( \frac{1}{\sum_{m=1}^M u_m a_{mk}} - \sigma_k^2 \right)^+ \quad (14)$$

其中, 最优的  $\mathbf{u}$  应满足式(8)、式(10)以及单天线功率约束(5b),  $(x)^+ = \max(x, 0)$ 。

由式(14)可以看出, 最优的功率分配中包含由向量  $\mathbf{u}$  决定的多个水平面。文献[12]研究了存在多个水平面的灌水功率分配问题, 并且在  $p_k$  只与  $u_k$  有关的特定情况下, 给出了计算  $\mathbf{u}$  的有效方法。然而, 不难看出, 在式(14)中  $p_k$  由  $\mathbf{u}$  中的所有元素共同决定, 因此文献[12]给出的方法不能应用于本文所考虑的问题。

下一节将提出一种求解水平面变量  $\mathbf{u}$  的次优方法。为此, 首先通过下述定理给出该变量最优值的一些性质。

**定理 1** 对于如下的单水平面灌水功率分配优化问题

$$\max_{\mathbf{p}} \sum_{k=1}^K \log\left(1 + \frac{p_k}{\sigma_k^2}\right) \quad (15)$$

$$s.t. \quad \mathbf{w}\mathbf{A}\mathbf{p}^T \leq 1, \quad p_k \geq 0$$

其中,  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_M]$ ,  $\sum_{m=1}^M w_m = 1$ ,  $w_m \geq 0$ , 如果

优化问题(15)的最优解  $\mathbf{p}(\mathbf{w})$  满足  $\mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\mathbf{w}) \leq 1$ ,  $m=1, \dots, M$ , 则  $\mathbf{p}(\mathbf{w})$  也是优化问题(5)的最优解。

**证明** 设  $\bar{\mathbf{w}} = [\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_M]$  对应的  $\mathbf{p}(\bar{\mathbf{w}})$  能够满足  $\mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{w}}) \leq 1$ ,  $m=1, \dots, M$ 。由式(12)可知, 单水平面灌水功率分配可以表示为

$$p_k(\bar{\mathbf{w}}) = \left( \frac{1}{\lambda \sum_{m=1}^M \bar{w}_m a_{mk}} - \sigma_k^2 \right)^+ \quad (16)$$

其中,  $\lambda$  需要满足:

$$\bar{\mathbf{w}}\mathbf{A}\mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{w}}) = 1 \quad (17)$$

由于优化问题(5)是凸问题且满足强对偶条件<sup>[9]</sup>, 因此为了证明  $p_k(\bar{\mathbf{w}})$  是优化问题(5)的最优解, 只需证明  $p_k(\bar{\mathbf{w}})$  满足优化问题(5)对应的 KKT 条件。通过比较式(14)和式(16), 不难发现当  $\mathbf{u} = \lambda \bar{\mathbf{w}}$  时, 式(14)给出的  $p_k$  与式(16)给出的  $p_k(\bar{\mathbf{w}})$  相同。因此, 只需证明  $\mathbf{u} = \lambda \bar{\mathbf{w}}$  满足式(8)、式(10)以及单天线功率约束(5b)即可完成证明。

首先, 由于  $p_k(\bar{\mathbf{w}})$  满足  $\mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{w}}) \leq 1$ ,  $m=1, \dots, M$ , 且当  $\mathbf{u} = \lambda \bar{\mathbf{w}}$  时  $p_k(\bar{\mathbf{w}}) = p_k$ , 因此单天线功率约束(5b)得以满足。其次, 由于  $\lambda > 0$  以及  $0 \leq \bar{w}_m \leq 1$ , 因此式(8)成立。最后, 考虑到  $\sum_{m=1}^M \bar{w}_m = 1$ , 即  $\bar{\mathbf{w}}\mathbf{I}^T = 1$ ,

可以将式(17)重新表示为

$$\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{A}\mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{w}}) - \mathbf{I}^T) = 0 \quad (18)$$

由于  $0 \leq \bar{w}_m \leq 1$  且  $\mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{w}}) \leq 1$ , 因此式(18)可以等价表示为

$$\lambda \bar{w}_m (\mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{w}}) - 1) = 0, \quad m=1, \dots, M \quad (19)$$

其中, 引入了水平面变量  $\lambda$  以便于后述证明。由于  $\lambda > 0$ , 因此它不影响式(19)的成立。

考虑到  $u_m = \lambda \bar{w}_m$  和  $p_k = p_k(\bar{\mathbf{w}})$ , 可知式(10)也成立。由此, 该定理得证。

**推论 1** 考虑到  $\mathbf{u} = \lambda \bar{\mathbf{w}}$  和  $\sum_{m=1}^M \bar{w}_m = 1$ , 可得

$\lambda = \sum_{m=1}^M u_m$ ,  $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{u} / \sum_{m=1}^M u_m$ , 即  $\bar{\mathbf{w}}$  是归一化的水平面变量  $\mathbf{u}$ 。

### 4 低复杂度功率分配

根据上一节的定理, 可以将计算最优水平面变量  $\mathbf{u}$  转换为找出在优化问题(15)中满足  $\mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\mathbf{w}) \leq 1$  的  $\mathbf{w}$ ,  $m=1, \dots, M$ 。根据式(19)并考虑  $\sum_{m=1}^M w_m = 1$  和  $w_m \geq 0$ , 不难得出对于任意  $\mathbf{w}$ , 至少存在一个  $\mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\mathbf{w}) = 1$ 。因此, 最优的  $\mathbf{w}$  可以通过求解以下优化问题而得到

$$\min_{\mathbf{w}} \max_{m=1, \dots, M} q_m(\mathbf{w}) \quad (20)$$

其中,  $q_m(\mathbf{w}) = \mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\mathbf{w}) - 1$ 。

然而, 对优化问题(20)直接进行求解仍然比较困难。下面提出一种针对优化问题(20)的次优求解方法, 它能够以较低的复杂度达到接近最优的性能。为此, 考虑  $\mathbf{w}$  在功率分配中的物理意义。在优化问题(15)中,  $\mathbf{w}$  将原优化问题(5)中针对每个天线的功率约束转变为一个加权和功率约束, 其中  $w_m$  体现了第  $m$  个天线的功率约束在加权和功率约束中的重要程度。不难看出, 当  $w_m = 1$  时, 优化问题(15)的最优解一定能够使第  $m$  个天线的功率约束得以满足, 即  $q_m = 0$ 。基于这一观察, 所提出的次优方法迭代地选择不能满足功率约束的天线, 并适当调整它们的加权参数, 直至满足一定的迭代停止条件。

首先讨论加权向量  $\mathbf{w}$  的迭代更新方法。设  $\mathbf{w}_{i-1}$  和  $\mathcal{S}_i = [s_1, \dots, s_i]$  分别表示第  $i$  次迭代中使用的加权向量和已选的不满足发射功率约束的天线序号组合。基于  $\mathbf{w}_{i-1}$ , 希望更新之后的  $\mathbf{w}_i$  能够使  $\mathcal{S}_i$  中天线的最大发射功率达到最小。根据以上对  $\mathbf{w}$  的物理意义的分析, 采用下面的次优更新方法

$$\begin{cases} w_{i,m} = \mu w_{i-1,m} + (1-\mu), & m = s_i \\ w_{i,m} = \mu w_{i-1,m}, & m \neq s_i \end{cases} \quad (21)$$

其中,  $0 \leq \mu \leq 1$ ,  $s_i$  表示第  $i$  次迭代中所选天线的序号,  $w_{i,m}$  表示  $\mathbf{w}_i$  的第  $m$  个元素。

式(21)给出的更新方法具有 3 个特征。一方面, 只要  $\mathbf{w}_{i-1}$  满足  $\sum_{m=1}^M w_{i-1,m} = 1$ , 则有  $\sum_{m=1}^M w_{i,m} = 1$ ; 另一方面,  $w_{i,s_i} \geq w_{i-1,s_i}$ , 也即在第  $i+1$  次迭代中天线  $s_i$  将具有更大的权值, 从而降低发射功率; 最后, 当  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i) \geq 0$  时, 可以证明  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  是  $\mu$  的单调递增函数 (证明过程见附录)。

基于式(21)的特征, 可以采用下面给出的二分法选择  $\mu$ , 使得天线  $s_i$  在所有已选天线  $\mathcal{S}_i$  中不再具有最大的发射功率。

- 1) 定义  $\mu_{\min} = 0$  和  $\mu_{\max} = 1$ 。
- 2) 计算  $\mu = (\mu_{\min} + \mu_{\max})/2$ , 并根据式(21)更新  $\mathbf{w}_i$ ; 由式(16)计算  $\mathbf{p}(\mathbf{w}_i)$  和  $q_m(\mathbf{w}_i)$ ,  $m \in \mathcal{S}_i$ 。
- 3) 如果  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i) = \max_{m \in \mathcal{S}_i} q_m(\mathbf{w}_i)$ , 更新  $\mu_{\max} = \mu$ ; 否则, 更新  $\mu_{\min} = \mu$ 。
- 4) 重复步骤 2)和 3), 直至  $\mu_{\max} - \mu_{\min} < \epsilon$ , 其中,  $\epsilon$  是特定的门限值。

根据以上分析, 所提出的低复杂度功率分配方法可以总结如下。

- 1) 初始化。设  $i = 0$ ,  $\mathcal{S}_0 = \phi$  (空集),  $\mathcal{T}_0 = \{1, \dots, M\}$ ,  $\mathbf{w}_0 = \left[ \frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M} \right]$ , 即所有天线具有相同的权值, 并计算  $q_m(\mathbf{w}_0)$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$ 。

2) 迭代。

- ① 设  $i = i + 1$ , 从  $\mathcal{T}_{i-1}$  中选择具有最大发射功率的天线:  $s_i = \arg \max_{m \in \mathcal{T}_{i-1}} q_m(\mathbf{w}_{i-1})$ , 更新  $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{i-1} \cup \{s_i\}$ ,  $\mathcal{T}_i = \{m \in \mathcal{T}_{i-1}, m \notin \mathcal{S}_i\}$ 。

- ② 根据式(21)更新  $\mathbf{w}_i$ , 其中对  $\mu$  的计算分为 2 种情况:

当  $i = 1$  时, 由于已选天线的个数为 1 并且  $q_{s_1}(\mathbf{w}_1)$  是  $\mu$  的单调递增函数, 因此  $\mu$  的最优值为 0, 即  $\mathbf{w}_1$  被更新为:  $w_{1,s_1} = 1$ ,  $w_{1,m} = 0$ ,  $m \neq s_1$ 。

当  $i > 1$  时,  $\mu$  可以通过上面给出的二分法得到。

- ③ 计算  $q_m(\mathbf{w}_i)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , 并定义  $q_{\mathcal{S}_i} = \max_{m \in \mathcal{S}_i} q_m(\mathbf{w}_i)$ ,  $q_{\mathcal{T}_i} = \max_{m \in \mathcal{T}_i} q_m(\mathbf{w}_i)$ 。

- 3) 若  $q_{\mathcal{T}_i} > q_{\mathcal{S}_i}$ , 重复步骤 2); 否则, 由式(16)计算  $\mathbf{p}(\mathbf{w}_i)$ , 并得到最终的功率分配结果为

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{w}_i)}{\max_m \mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\mathbf{w}_i)} \quad (22)$$

这里采用所有天线的最大发射功率  $\max_m \mathbf{a}_m \mathbf{p}^T(\mathbf{w}_i)$  对  $\mathbf{p}(\mathbf{w}_i)$  进行归一化, 因而能够保证得到的  $\mathbf{p}$  一定满足单天线功率约束。

### 5 仿真分析

本节通过蒙特卡洛仿真评估所提出功率分配方法的性能和复杂度。为了进行性能和复杂度比较, 仿真中还考虑了其他 3 种功率分配方法, 包括最优功率分配、启发式功率分配<sup>[10]</sup>和等功率分配<sup>[11]</sup>,

其中采用内点法<sup>[9]</sup>计算最优功率分配, 并适当地配置内点法的参数使其在不降低性能的前提下具有尽可能低的计算复杂度。

设基站的总发射功率为  $P$ , 每个天线具有相同的发射功率约束  $P/M$ , 信噪比定义为  $P/\sigma^2$ , 仿真中设置为 5dB。假设不同用户的信道相互统计独立, 且每个用户的信道为统计独立同分布的瑞利衰落信道, 由零均值单位方差的复高斯随机变量构成。假设基站已知所有用户的准确信道信息, 并采用基于信道矩阵伪逆的 ZF 预编码服务多个用户。所有仿真进行 1 000 次蒙特卡洛实验。

图 1 给出了不同用户数  $K$  下 4 种功率分配方法的和数据率。可以看出, 对于不同的用户数, 所提出的低复杂度功率分配方法均能够获得接近最优功率分配的性能。等功率分配性能最差, 并且与所提出的功率分配方法之间的差距随着被服务用户数的增长而扩大。启发式方法能够在一定程度上提高等功率分配的性能, 但与所提出的功率分配方法相比仍有明显的性能差距。

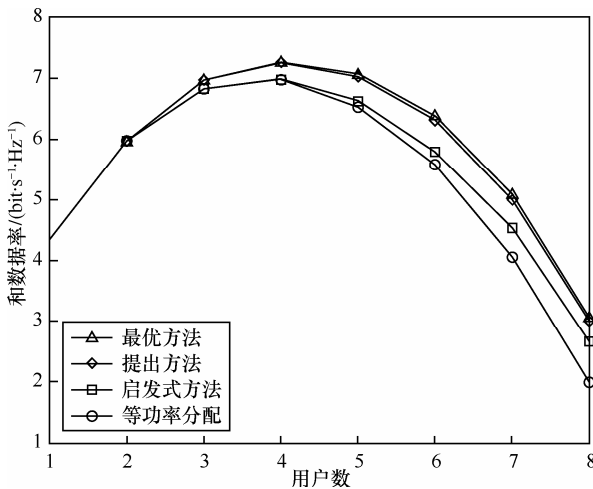


图 1 不同用户数  $K$  下 4 种功率分配方法的和数据率 (基站天线数  $M=8$ , 所提出方法的门限  $\epsilon=0.01$ )

图 2 比较了 4 种功率分配方法的计算复杂度。由于对最优功率分配方法复杂度的理论分析较为困难, 这里采用平均处理时间作为复杂度评估指标。将 4 种功率分配方法在 3GHz Pentium IV 1GB-RAM 个人计算机的 MATLAB 环境下执行, 并采用 MATLAB 配置的 tic/toc 命令统计各种方法的处理时间。可以看出, 与最优功率分配方法相比, 所提出的功率分配方法有效地降低了计算复杂度。

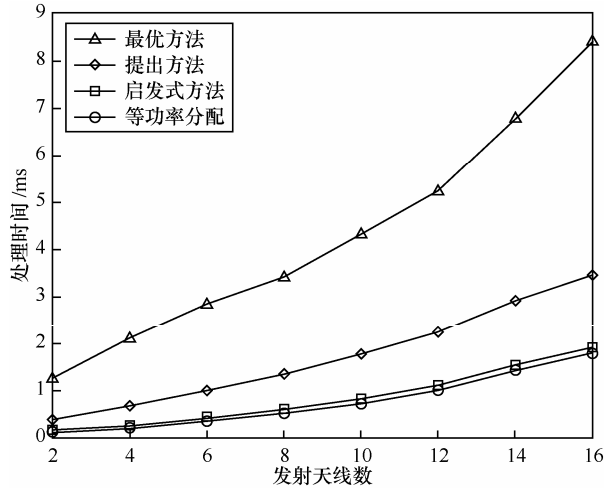


图 2 基站天线数  $M$  不同时 4 种功率分配方法的计算复杂度(处理时间) (服务用户数  $K=M$ , 所提出方法的门限  $\epsilon=0.01$ )

所提出功率分配方法的复杂度由迭代次数以及每次迭代中二分法的复杂度共同决定, 而后者受到门限值  $\epsilon$  的影响。图 3 对这两方面的复杂度进行了进一步分析。首先, 从图 3(a)中可以看出, 所提出的方法相对于门限值  $\epsilon$  具有很快的收敛速度, 当  $\epsilon \leq 0.01$  时, 系统达到稳态性能。其次, 图 3(b)分析了基站天线数  $M$  对所提出方法的迭代次数的影响。可以看出, 随着基站天线数的增长, 所提出方法的迭代次数将缓慢增长。例如, 当天线数由 2 增至 16 时, 迭代次数仅由 1.5 增至 3。这 2 方面因素共同使得所提出的功率分配方法具有较低的计算复杂度。

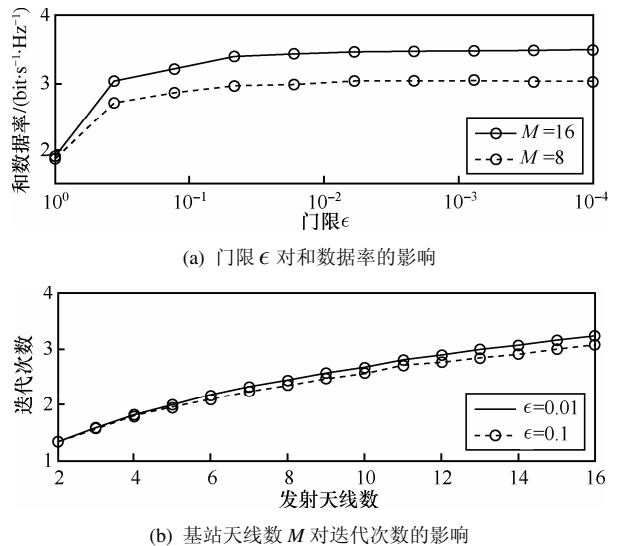


图 3 所提出的功率分配方法的复杂度分析 (服务用户数  $K=M$ )

## 6 结束语

本文研究了基于单天线功率约束和 ZF 预编码

的低复杂度功率分配方法。证明了最优功率分配具有多水平面的灌水结构，并由此提出了一种新的功率分配方法。仿真结果表明，与最优功率分配方法相比，所提出的功率分配方法能够以很小的性能损失为代价有效地降低计算复杂度，其性能优于现有的等功率分配和启发式方法。

### 附录 $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$ 关于 $\mu$ 的单调性

设满足  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i) \geq 0$  的  $\mu$  的变量域为  $\mathcal{U}$ ，下面证明在变量域  $\mathcal{U}$  内  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  是关于  $\mu$  的单调递增函数。

由于  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  具有灌水结构，因此不同的  $\mu$  可能产生不同的激活用户，即具有非零功率的用户。为了得到  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  关于  $\mu$  的显式表达式，将变量域  $\mathcal{U}$  分为多个区域  $\mathcal{U}_j$ ， $j=1, \dots, J$ ， $\bigcup_{j=1}^J \mathcal{U}_j = \mathcal{U}$ 。位于区域  $\mathcal{U}_j$  内的  $\mu$  将产生相同的激活用户组合，记为  $\pi_j$ 。

对于  $\mu \in \mathcal{U}_j$ ，由式(16)可知功率分配  $p(\mathbf{w}_i)$  为

$$\begin{cases} p_k(\mathbf{w}_i) = \frac{1}{\lambda \sum_{m=1}^M w_{i,m} a_{mk}} - \sigma_k^2, & k \in \pi_j \\ p_k(\mathbf{w}_i) = 0, & k \notin \pi_j \end{cases} \quad (23)$$

根据式(17)可以得到水平面变量  $\lambda$  为

$$\lambda = \frac{|\pi_j|}{1 + \sum_{k \in \pi_j} \sigma_k^2 \sum_{m=1}^M w_{i,m} a_{mk}} \quad (24)$$

其中， $|\pi_j|$  表示  $\pi_j$  中元素的个数。

由式(23)和式(24)可得：

$$q_{s_i}(\mathbf{w}_i) = \sum_{k \in \pi_j} \frac{a_{s_i,k} \left( 1 + \sum_{k \in \pi_j} \sigma_k^2 \sum_{m=1}^M w_{i,m} a_{mk} \right)}{|\pi_j| \sum_{m=1}^M w_{i,m} a_{mk}} - \sum_{k \in \pi_j} a_{s_i,k} \sigma_k^2 - 1 \quad (25)$$

由式(21)可得  $\sum_{m=1}^M w_{i-1,m} a_{mk}$  与  $\mu$  满足

$$\sum_{m=1}^M w_{i,m} a_{mk} = \mu \sum_{m=1}^M w_{i-1,m} a_{mk} + (1-\mu)a_{s_i,k} \quad (26)$$

定义  $B_k = \sum_{m=1}^M w_{i-1,m} a_{mk}$ ，则将式(26)代入式(25)可得

$$\begin{aligned} q_{s_i}(\mathbf{w}_i) &= \sum_{k \in \pi_j} \frac{a_{s_i,k} (1 + \sum_{k \in \pi_j} \sigma_k^2 (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k}))}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})} - \sum_{k \in \pi_j} a_{s_i,k} \sigma_k^2 - 1 \\ &= \sum_{k \in \pi_j} \frac{a_{s_i,k} (1 + \sum_{k \in \pi_j} \sigma_k^2 (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k}))}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})} - \sum_{k \in \pi_j} a_{s_i,k} \sigma_k^2 - \sum_{k \in \pi_j} \frac{1}{|\pi_j|} \\ &= \mu \sum_{k \in \pi_j} \frac{a_{s_i,k} (1 + \sum_{k \in \pi_j} \sigma_k^2 B_k) - B_k (1 + \sum_{k \in \pi_j} \sigma_k^2 a_{s_i,k})}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})} \end{aligned}$$

$$= \mu \sum_{k \in \pi_j} \frac{a_{s_i,k} E - B_k F}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})} \quad (27)$$

其中， $E = 1 + \sum_{k \in \pi_j} \sigma_k^2 B_k$ ， $F = 1 + \sum_{k \in \pi_j} \sigma_k^2 a_{s_i,k}$ 。这里，由于在区域  $\mathcal{U}_j$  上  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i) \geq 0$  且  $0 \leq \mu \leq 1$ ，因此

$$\sum_{k \in \pi_j} \frac{a_{s_i,k} E - B_k F}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})} \geq 0 \quad (28)$$

下面证明  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  关于  $\mu$  的一阶导  $\nabla q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  是非负的。

由式(27)可得

$$\nabla q_{s_i}(\mathbf{w}_i) = \sum_{k \in \pi_j} \frac{a_{s_i,k} (a_{s_i,k} E - B_k F)}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})^2} \quad (29)$$

当  $a_{s_i,k} E - B_k F \geq 0$ ，即  $B_k \leq a_{s_i,k} E / F$  时，可得

$$\begin{aligned} & \frac{a_{s_i,k} (a_{s_i,k} E - B_k F)}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})^2} \\ & \geq \frac{a_{s_i,k}}{\mu a_{s_i,k} E / F + (1-\mu)a_{s_i,k}} \frac{a_{s_i,k} E - B_k F}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})} \\ & = \frac{1}{\mu E / F + (1-\mu)} \frac{a_{s_i,k} E - B_k F}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})} \end{aligned} \quad (30)$$

类似地，当  $a_{s_i,k} E - B_k F \leq 0$  时，可以证明式(30)给出的不等式仍然成立。因此， $\nabla q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  的下限可以表示为

$$\nabla q_{s_i}(\mathbf{w}_i) \geq \frac{1}{\mu E / F + (1-\mu)} \sum_{k \in \pi_j} \frac{a_{s_i,k} E - B_k F}{|\pi_j| (\mu B_k + (1-\mu)a_{s_i,k})} \quad (31)$$

由于  $E > 0$ 、 $F > 0$  以及  $0 \leq \mu \leq 1$ ，因此  $\mu E / F + (1-\mu) > 0$ 。同时，根据式(28)和式(31)，可知  $\nabla q_{s_i}(\mathbf{w}_i) \geq 0$ 。

按照以上的方法，可以证明  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  在每个区域  $\mathcal{U}_j$  上都是  $\mu$  的单调递增函数， $j=0, \dots, J$ 。尽管  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  在  $\mathcal{U}_j$  的边界点可能不可求导，但是考虑到  $\mathbf{w}_i$  是  $\mathcal{U}$  上的连续函数，这使得  $\lambda$  和  $p(\mathbf{w}_i)$  也都是  $\mathcal{U}$  上的连续函数，因此在变量域  $\mathcal{U}$  上  $q_{s_i}(\mathbf{w}_i)$  是  $\mu$  的单调递增函数。

### 参考文献：

- [1] GESBERT D, KOUNTOURIS M, HEATH JR R, *et al.* Shifting the MIMO paradigm: from single user to multiuser communications[J]. IEEE Signal Processing Mag, 2007, 24(5):36-46.
- [2] DIMIC G, SIDIROPOULOS N D. On downlink beamforming with greedy user selection: performance analysis and a simple new algorithm[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2005, 53(10): 3857-3868.
- [3] WIESEL A, ELDAR Y C, SHAMAI S. Zero-forcing precoding and generalized inverses[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2008, 56(9): 4409-4418.
- [4] GESBERT D, HANLY S, HUANG H, *et al.* Multi-cell MIMO cooperative networks: a new look at interference[J]. IEEE J Select Areas

(下转第 85 页)