

第六章 采样控制系统

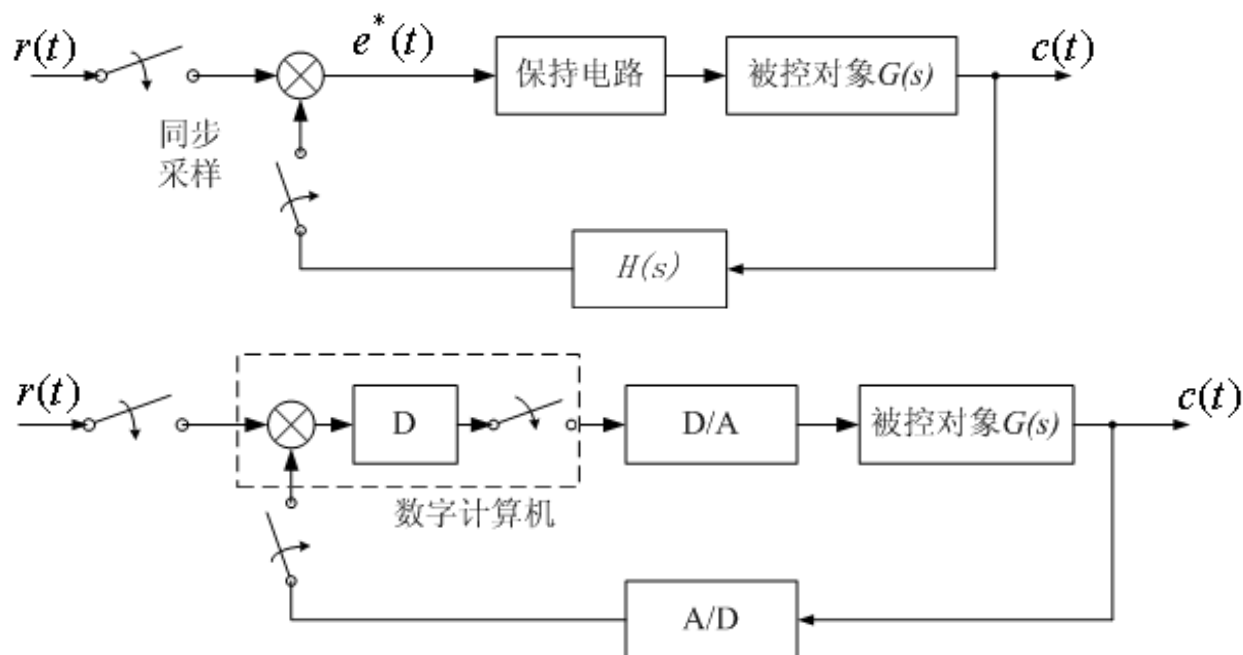
采样系统：除有离散信号，还有连续信号

分析的理论基础：采样定理

数学工具： z 变换理论——拉氏变换/傅氏变换（连续系统）

数学模型：脉冲传函——传递函数（连续系统）

研究内容：稳、瞬态性能分析



优点：

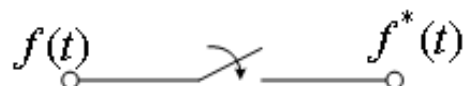
{ 结构简单
检测部分的灵敏性高
信号的传递/转换精度高（取决于A/D）
数码信号的传递，可有效抑制噪声，抗干扰
易实现复杂过程控制和最优控制

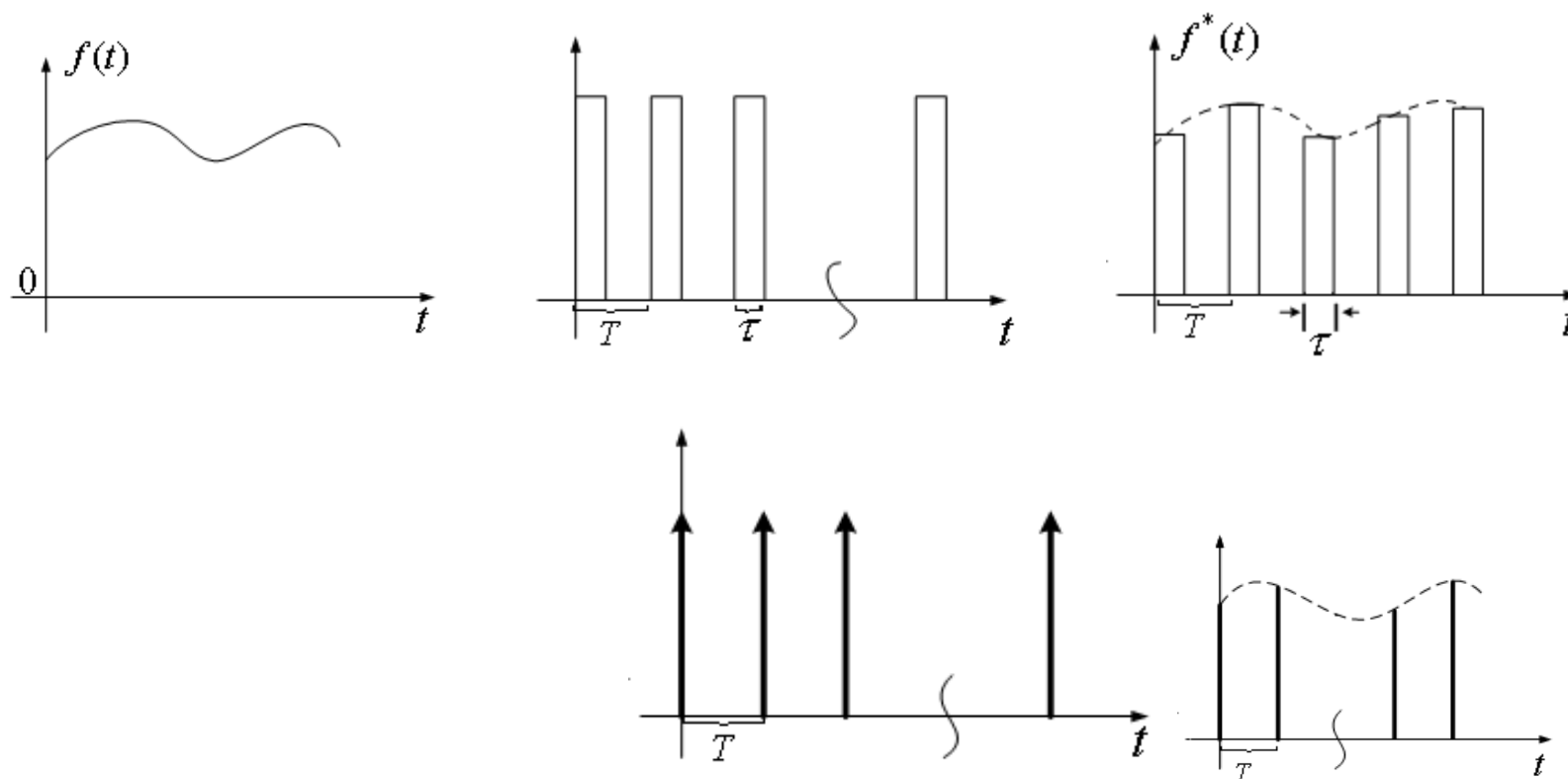
CPU { 控制精度、速度、性能价格比优于模拟控制器
通用性好，便于改变控制规律

§ 6.1 信号的采样和恢复

一. 信号采样（同步、等速率采样）

——连续信号转换为离散信号的过程





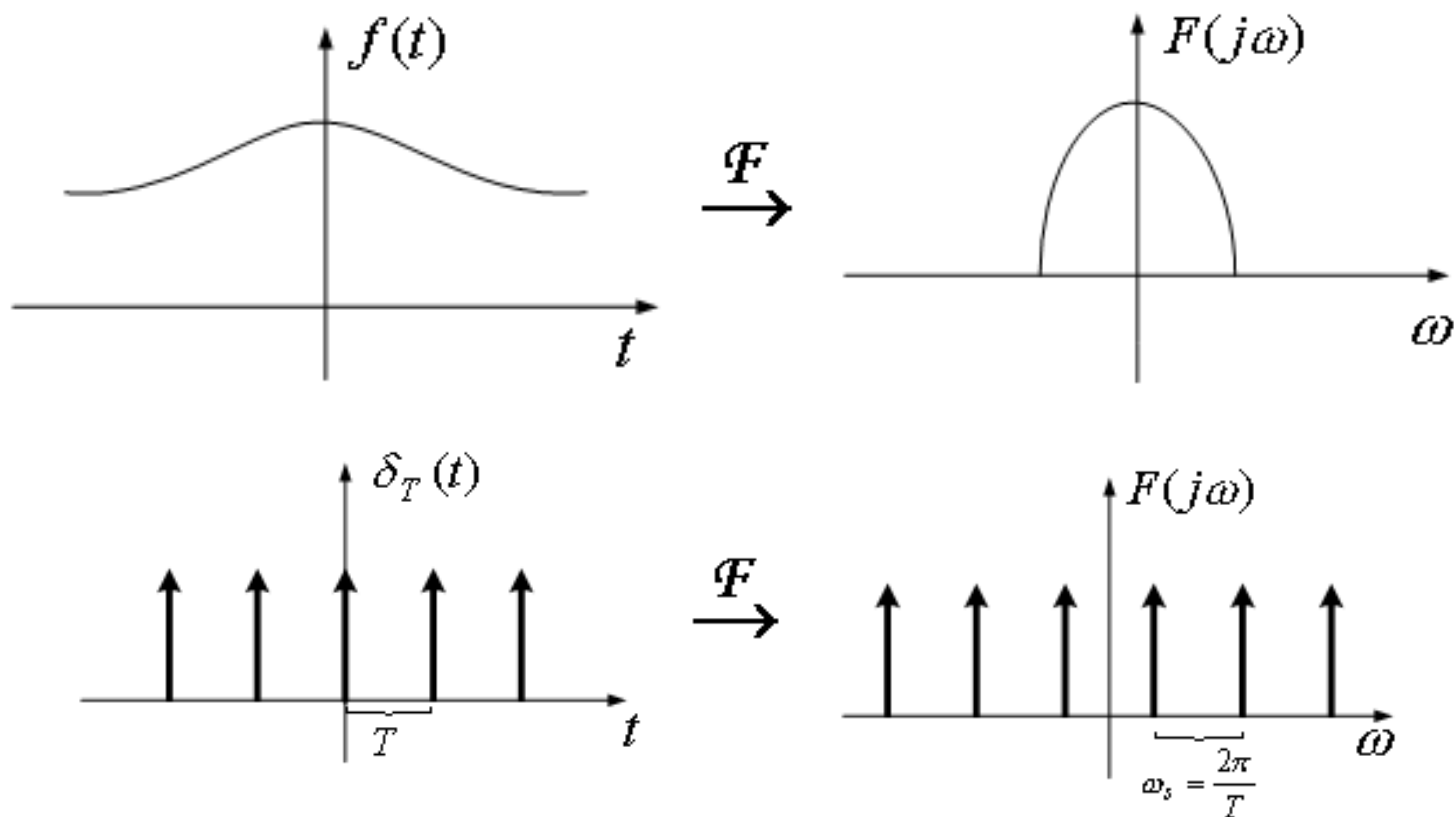
$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \underbrace{[U(t-kT) - U(t-kT-\tau)]}_{\tau \rightarrow 0 \text{ 时 } \rightarrow \tau \cdot \delta(t-kT)} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \tau \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t-kT)$$

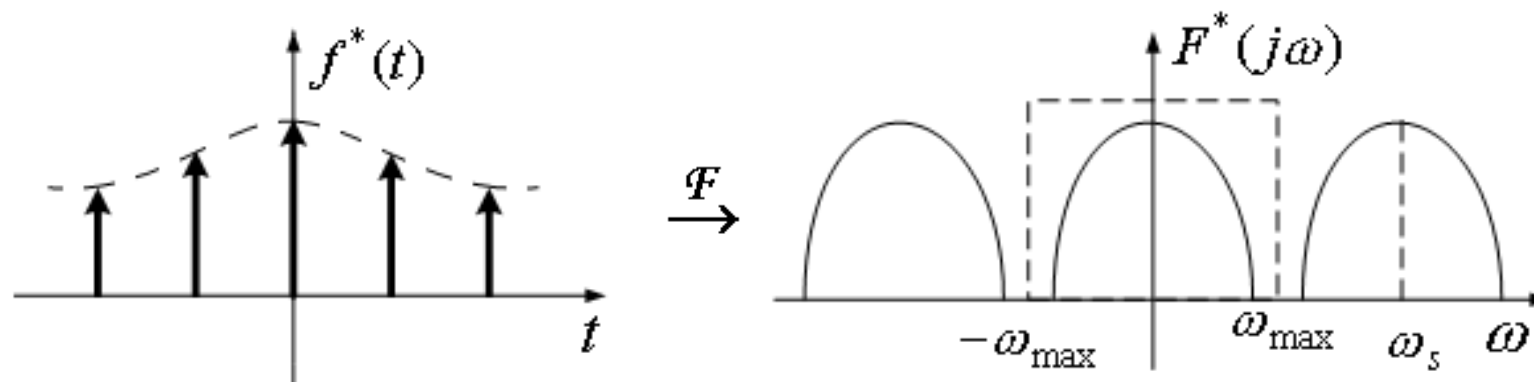
倍乘器系数 τ 与采样器后面的系统归到一起：

取 $f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t-kT) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) = f(t) \delta_T(t)$ — 理想采样过程的数学描述。



二. 采样定理（香农定理）





采样定理： $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$ (or $T_s < \pi/\omega_{\max}$)

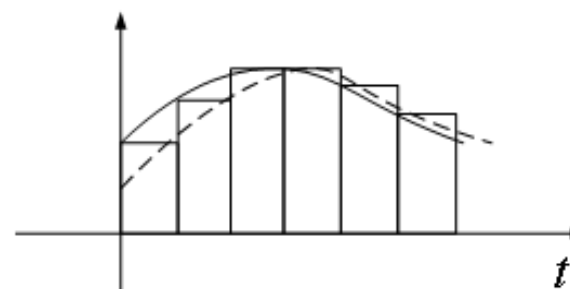
三. 信号的恢复

理论：理想低通滤波器

工程：保持器——采样信号→连续信号的元件



零阶保持器 (ZOH)



一阶保持器



1. 零阶保持器（步进电机）

$x(t)$ 经采样后: $x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$

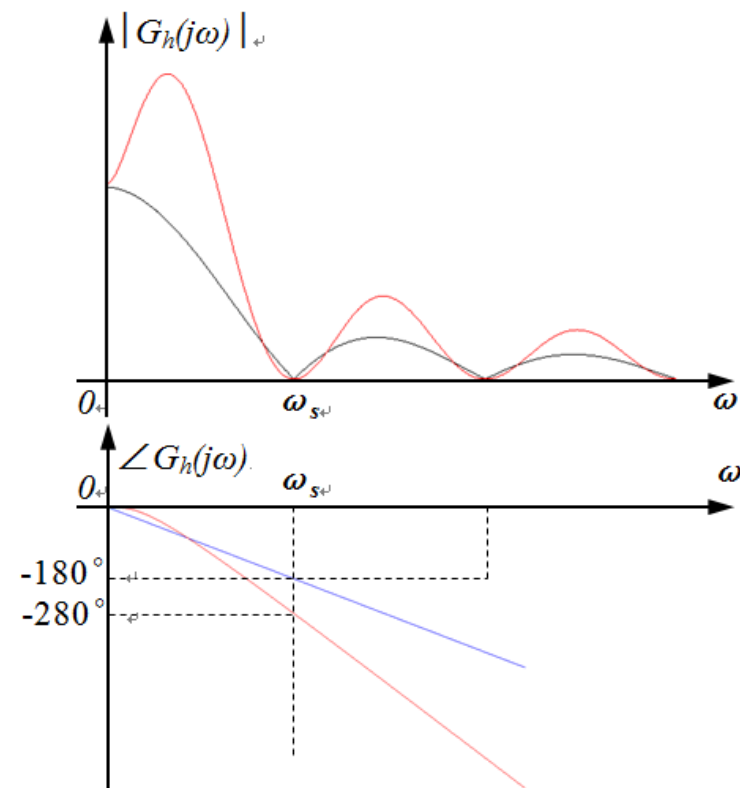
其拉氏变换为: $X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-ksT}$

ZOH 输出: $x_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\{U(t - kT) - U[t - (k+1)T]\}$

其拉氏变换为: $X_h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-(k+1)Ts}}{s} \right]$

$$\therefore G_h(s) = \frac{X_h(s)}{X^*(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-(k+1)Ts}}{s} \right]}{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}}{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}} \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$



频率响应：

$$\begin{aligned} G_h(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{j\omega} (e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}) = 2 \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega T}{2} \\ &= T \cdot \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{令 } \omega_s = \frac{2\pi}{T}, \text{ 有}$$

$$|G_h(j\omega)| = \frac{2\pi}{\omega_s} \cdot \frac{\sin(\frac{\omega\pi}{\omega_s})}{\frac{\omega\pi}{\omega_s}}, \quad \angle G_h(j\omega) = -\frac{\omega\pi}{\omega_s}$$

2. 一阶保持器

——按以前两个采样值的变化趋势来预测后面一个采样值外推规律（一阶保持器的输出）为：

$$x_h(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x[(k-1)T]}{T} \cdot (t - kT)$$

传递函数为：



$$G_h(s) = T(1+Ts) \left(\frac{1-e^{-Ts}}{Ts} \right)^2$$

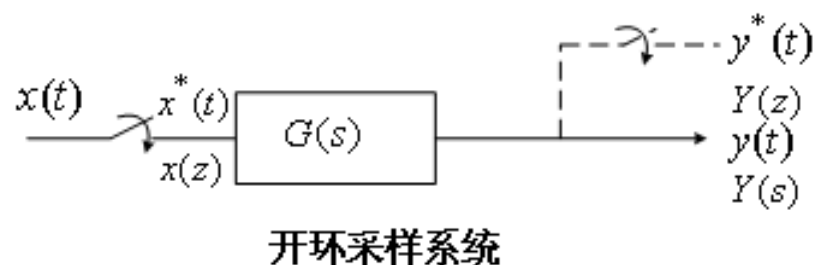
$$G_h(j\omega) = T \sqrt{1+(\omega T)^2} \left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right]^2 e^{j(\arctg \omega T - \omega T)}$$

• 特性分析：

①均为低通滤波器，但非理想。

离散信号频谱中的高频成分更容易通过一阶保持器，因此一阶保持器的输出波形中将会含有更多的高频成分，但一阶保持器能较好地复现速度输入信号，而 ZOH 只能较好地复现阶跃函数信号。

② 均具有相位滞后特性，但相对于一、二阶保持器，ZOH 的相位滞后最小。故一阶保持器反应较迟钝，不利于闭环系统稳定工作，故在实际控制系统中，经常采用的还是零阶保持器。



§ 6.2 脉冲传递函数

一. 定义

问题：在离散系统中是否也有类似于连续系统传递函数的概念？——输出量 Z 变换与输入量 Z 变换之比能否也表示成一种不依赖于输入信号而紧紧取决于对象本身的函数？

图中 $G(s)$ 为对象的传递函数。连续信号 $x(t)$ 经采样器以后成为离散的脉冲序列 $x^*(t)$ 加在连续对象 $G(s)$ 上。 $Y(z)$ 与 $X(z)$ 有什么关系呢？——需求 $y(kT)$ ，进而求 $Y(z)$ 。

下面研究一个单位脉冲函数 $\delta(t)$ 加在 $G(s)$ 上的情况。

$$Y(s) = G(s) \cdot 1 = G(s) \rightarrow y(t) = L^{-1}[G(s)] = g(t) \quad \text{——单位脉冲响应}$$

$$\text{若 } \delta(t-a) \text{ 加在 } G(s) \text{ 上: } \rightarrow y(t) = g(t-a)$$

$$\text{而 } x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots$$

$0 \leq t \leq T$ 时，只有 $t=0$ 时的脉冲

$$\therefore y(t) = x(0)g(t), \quad 0 \leq t \leq T \rightarrow y(0) = x(0)g(0)$$

$T \leq t \leq 2T$ 时，实际起作用的是 $t=0$ 和 $t=T$ 时的脉冲

$$\therefore y(t) = x(0)g(t) + x(T)g(t-T) \rightarrow y(T) = x(0)g(T) + x(T)g(0)$$



$2T \leq t \leq 3T$ 时，只有 $t=0$ ， $t=T$ ， $t=2T$ 的脉冲

$$\therefore y(t) = x(0)g(t) + x(T)g(t-T) + x(2T)g(t-2T)$$

$$\rightarrow y(2T) = x(0)g(2T) + x(T)g(T) + x(2T)g(0)$$

•

$$\therefore Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = y(0)z^0 + y(T)z^{-1} + y(2T)z^{-2} + \dots$$

$$= x(0)g(0)$$

$$+ [x(0)g(T) + x(T)g(0)]z^{-1}$$

$$+ [x(0)g(2T) + x(T)g(T) + x(2T)g(0)]z^{-2} + \dots$$

$$= x(0)[g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \dots]$$

$$+ x(T)[g(0)z^{-1} + g(T)z^{-2} + g(2T)z^{-3} + \dots]$$

$$+ x(2T)[g(0)z^{-2} + g(T)z^{-3} + \dots] + \dots$$

$$= x(0)[g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \dots]$$

$$+ x(T)z^{-1}[g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \dots]$$

$$+ x(2T)z^{-2}[g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \dots] + \dots$$



$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = G(z) \cdot X(z)$$

可见 $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{L^{-1}[G(s)]\}$ 仅由对象本身的特性决定而与输入信号无关。

由 $G(z)$ 可求 $Y(z) \rightarrow y(kT)$

——即只能给出输出信号的一连串离散数值 $y(kT)$ ，而不能给出连续信号本身。

初始条件为零时， $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ 即为脉冲传递函数。

***注意：**

① $G(s)$ 表示的是某个线性环节本身的传递函数，而 $G(z)$ 表示的是线性环节与采样器两者组合体的脉冲传函。尽管计算 $G(z)$ 时只需知道线性环节自身的动特性 $G(s)$ ，但算出的 $G(z)$ 却是包含了采样器的性质在内的。要是没有采样器，只有那个线性环节，也就谈不上脉冲传函了。

② $G(z)$ 与 $G(s)$ 尽管都使用同一字母 G ，但 $G(z) \neq G(s)|_{s=z}$ ！

二. $G(z)$ 的求法

1. 常规法



步骤：

① $G(s)$ 求 $g(t) = L^{-1}[G(s)]$ 。

② $g(t)$ 采样求 $g(kT)$ 。

③ $G(z) = Z[g(kT)]$

例1. 求图示系统的 $G(z)$

解：
$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)} = \frac{K}{b-a} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right)$$

$\downarrow L^{-1}$

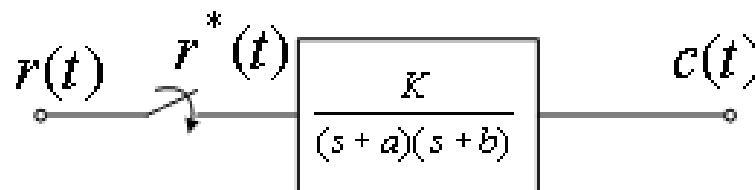
$$g(t) = \frac{K}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) U(t)$$

\downarrow 采样

$$g(kT) = \frac{K}{b-a} (e^{-akT} - e^{-bkT}) U(t)$$

$\downarrow z$

$$G(z) = \frac{K}{b-a} \left(\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-bT} z^{-1}} \right)$$



2. 留数法

$$G(z) = \sum \left[G(s) \frac{z}{z - e^{Ts}} \quad \text{在 } G(s) \text{ 极点上的留数} \right]$$

例 2. 已知 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, 求 $G(z)$

$$\text{解: } A_1 = sG(s) \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=0} = s \cdot \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=0} = \frac{z}{z-1}$$

$$A_2 = (s+1)G(s) \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=-1} = (s+1) \cdot \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=-1} = -\frac{z}{z - e^{-T}}$$

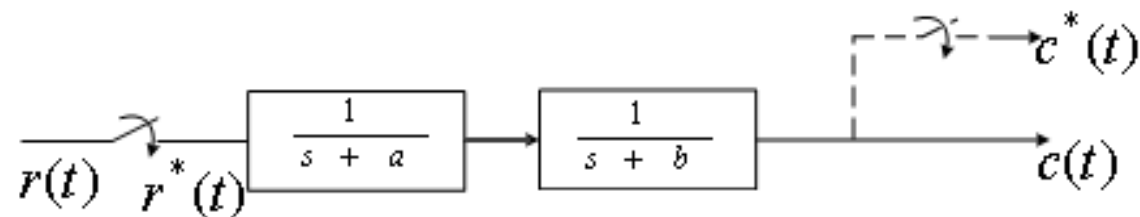
$$\therefore G(z) = A_1 + A_2 = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}}$$

三. 串联环节的 Z 传递函数

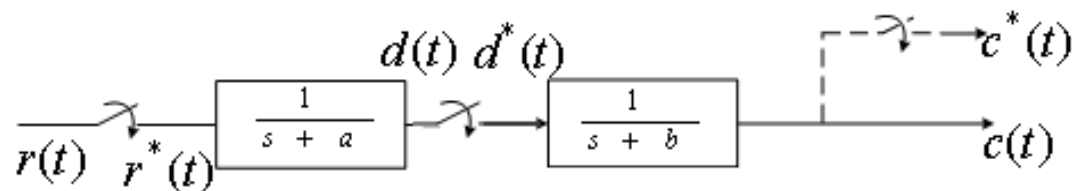
例 3. 有两个开环采样系统的结构如下, 求其 $G(z)$



(a)



(b)



解： (a) $\because G_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s+b}$
 $\therefore G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$

例1 $\rightarrow G_a(z) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})} \right] = G_1 G_2(z)$

(b) $\because G_1(s) = \frac{1}{s+a} \rightarrow G_1(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}; \quad G_2(s) = \frac{1}{s+b} \rightarrow G_2(z) = \frac{z}{z - e^{-bT}}$



$$\therefore G_b(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{z^2}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$

可见, $G_1G_2(z) \neq G_1(z)G_2(z)$

四. 闭环系统脉冲传函

[系统一]

$$\therefore E(z) = R(z) - B(z)$$

$$B(z) = E(z) \cdot GH(z)$$

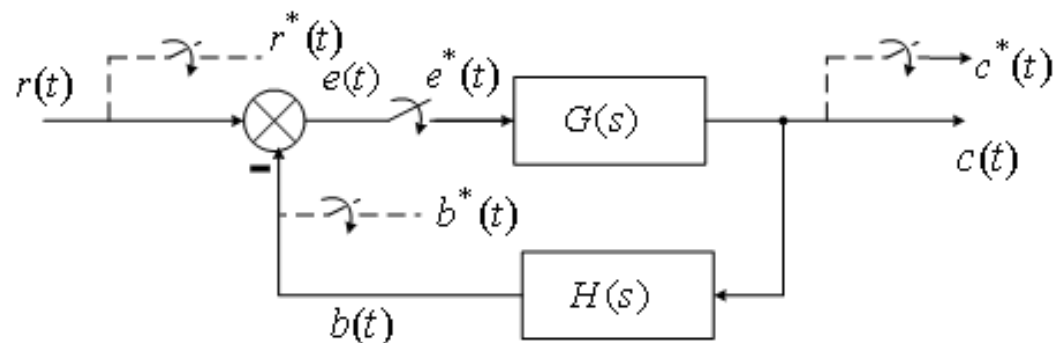
$$\therefore E(z) = R(z) - E(z) \cdot GH(z)$$

$$\rightarrow E(z) = \frac{R(z)}{1 + GH(z)}$$

$$\therefore C(z) = G(z) \cdot E(z)$$

$$\therefore T(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

$$\text{当 } H(s) = 1 \text{ 时, } T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}, \text{ 但 } \frac{G(z)}{1 + G(z)} \neq L\left[\frac{G(s)}{1 + G(s)}\right]$$



例 4. $G(s) = \frac{1}{s+a}$, $H(s)=1$, $T(z) = Z[T(s)]$ 否?

解: $G(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$

$$T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{\cancel{z}/(z - e^{-aT})}{1 + \cancel{z}/(z - e^{-aT})} = \frac{z}{2z - e^{-aT}}$$

$$\text{而 } T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\cancel{1}/(s+a)}{1 + \cancel{1}/(s+a)} = \frac{1}{s+a+1}$$

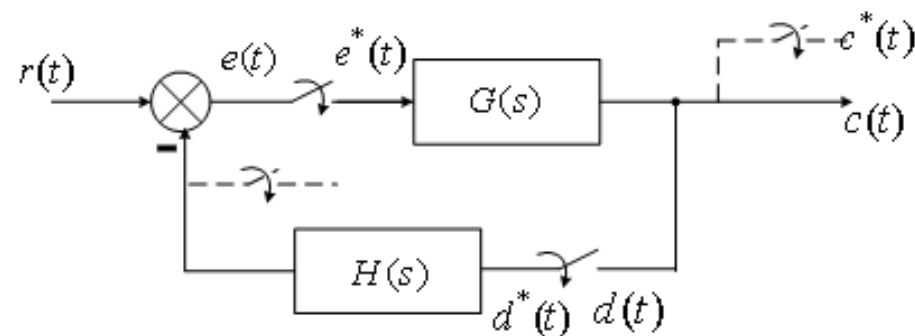
$$\downarrow T'(z) = Z[T(s)] = \frac{z}{1 - e^{-(a+1)T}}$$

$$\therefore T(z) \neq Z[T(s)]$$

[系统二]

$$\because E(z) = R(z) - B(z)$$

$$B(z) = H(z) \cdot D(z), \quad D(z) = G(z) \cdot E(z)$$



$$\therefore E(z) = R(z) - G(z) \cdot H(z) \cdot E(z) \rightarrow E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

$$\because C(z) = G(z) \cdot E(z)$$

$$\therefore T(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

当 $H(s)=1$ 时, $T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$, 此时系统一与系统二等效。

§ 6.3 采样系统的性能分析

一. s 平面到 z 平面的映射

$$x(t) \rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \rightarrow X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-ksT}$$

$$\rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$$\therefore \text{映射关系为 } e^{Ts} = z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$$



s 平面 $\xrightarrow{\text{映射}}$ z 平面

$\sigma < 0$, 整个左半平面 $|z| < 1$, 单位圆内

$\sigma = 0$, 虚轴 $|z| = 1$, 单位圆上

$\sigma > 0$, 整个右半平面 $|z| > 1$, 单位圆外

二. 稳定性

采样系统稳定的充要条件：闭环系统的特征根全部位于 z 平面的单位圆内，只要有一个在单位圆上，系统就临界稳定。

a) 朱利稳定判据——z 域中的稳定判据。

b) w 平面的劳斯稳定判据。

思路：找一种新的变换，使 z 平面的单位圆映射到一个新平面的虚轴之左，在此平面上可用劳斯判据，此平面即为 w 平面。

作双线性变换：

$$z = \frac{w+1}{w-1} \text{ (或 } \frac{1+w}{1-w} \text{)} \rightarrow w = \frac{z+1}{z-1} \text{ (或 } \frac{z-1}{z+1} \text{)}$$

令 $z = x + jy$, $w = u + jv$



$$\text{则 } w = u + jv = \frac{x + jy + 1}{x + jy - 1} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\begin{matrix} u & v \\ z \text{ 平面} & \Rightarrow & w \text{ 平面} \end{matrix}$$

单位圆上: $x^2 + y^2 = 1$ $u = 0$, 虚轴上

单位圆内: $x^2 + y^2 < 1$ $u < 0$, 虚轴之左

\therefore 在 w 平面上可用 Ruth 判据

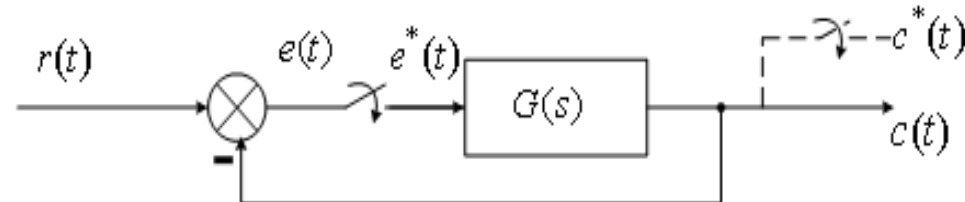
三. 采样瞬时的稳态误差

误差传递函数:

$$\varphi_{eR}(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G(z)}$$

$$\therefore E(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)}$$

在系统稳定的条件下, 由终值定理:



$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{R(z)}{1+G(z)}$$

1. 系统型别

$$G(z)H(z) = \frac{1}{(z-1)^N}$$

2. 静态误差函数

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z),$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z),$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$$

3. $r(t)$ 作用下采样端点时刻的稳态误差

$$r(t) = \text{单位阶跃 } U(t) / t \cdot U(t) / \frac{1}{2} t^2 U(t)$$

$$\rightarrow \frac{z}{z-1} / \frac{Tz}{(z-1)^2} / \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$



四. 瞬态特性分析

1. 采样系统的时域解法（→p25 图 8-24 例）

$$\text{求 } T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

$$Y(z) = T(z) \cdot R(z)$$

↓

$$\text{长除法展成幂级数 } Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$$

$$\downarrow Z^{-1}$$

$$y^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta(t - iT)$$

画出瞬态响应曲线，求性能指标。

z 变换局限：不能反应采样间隔中的信息

2. 采样系统极点分布与瞬态响应之间的关系

设闭环系统的闭环脉冲传函为：



$$T(z) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{k=1}^n (z - p_k)}, \quad n \geq m$$

其中 z_i , p_k 为 $T(z)$ 的零极点。

当输入 $r(t) = U(t)$, 且 $T(z)$ 无重极点时, 有

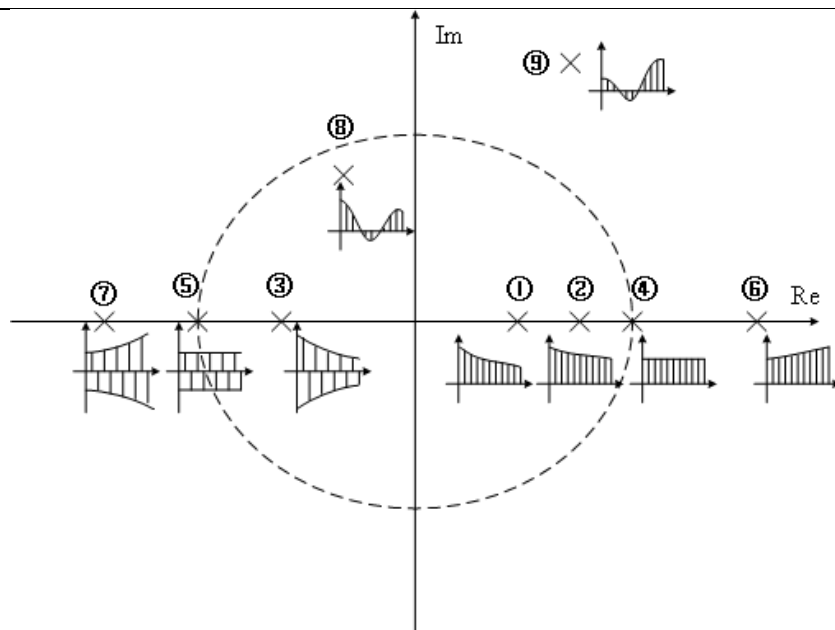
$$C(z) = T(z) \cdot R(z) = \frac{M(z)}{D(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$= C_0 \cdot \frac{z}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{C_i z}{z - p_i}$$

$Z^{-1} \downarrow$

$$c(kT) = \left[C_0 + \sum_{i=1}^n C_i \cdot p_i^k \right] \cdot U(kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$





1. $0 < p_i < 1$, 极点在单位圆内正实轴上, 响应单调收敛①②。
 $-1 < p_i < 0$, 极点在单位圆内负实轴上, 响应交替收敛③。
2. $p_i = 1$, 极点在单位圆与正实轴交点, 响应等幅震荡④。
 $p_i = -1$, 极点在单位圆与负实轴交点, 响应交替等幅震荡⑤。
3. $p_i > 1$, 极点在单位圆外正实轴上, 响应单调发散⑥。
 $p_i < -1$, 极点在单位圆外正实轴上, 响应交替发散⑦。
4. p_i 为共轭复根时, 响应为余弦振荡, $|p_k| < 1$, 振荡衰减⑧, $|p_k| > 1$, 振荡发散⑨。

