

## 第七章 状态空间分析与设计

### §7.1 引言

#### 一. 古典控制与现代控制

1. **古典**：试探性实验方法，难于直接检验，不易程式化，难于设计出某种意义上的最佳系统，本质：复频域，适应于单变量线性定常系统

**现代**：本质上是时域法；能设计最佳控制。

适应于单、多变量；线性、非线性；定常、时变，分布参数系统。(缺点：物理意义不直观，工程实现困难)

#### 2. 现代控制理论分支

{	线性系统理论	— 最为成熟，最为基础
	最优控制理论	
	最优估计理论	
	随机控制理论	
	非线性系统理论	
	大系统理论	

都不同程度受到线性系统理论的概念、方法和结果的影响和推动



### 3. 线性系统理论的主要学派

随所用数学工具和采用的系统描述的不同，已形成四个平行的分支：

{	线性系统的状态空间法：	一个最重要和影响最广的分支
	线性系统的几何理论	70年代，加拿大学者 <i>Wonham</i> . 都是在状态空间法的影响和推动下，形成和发展起来的。
	线性系统的代数理论	
	多变量频域方法	

### 二. 线性系统理论的研究对象

动态系统的数学方程具有线性属性的系统。严格说，一切实际系统非线性。但是，线性系统或可线性化系统大量存在。

{	线性定常系统
	线性时变系统

### 三. 线性系统理论的主要任务

#### a) 主要研究——认识和改造

- 线性系统状态的运动规律——分析问题



- 改变这种规律的可能性和方法，建立和揭示系统结构、参数、行为和性能间确定的和定量的关系——综合问题，是建立在分析基础上的。

b) 分析/综合的首要前提——建模

c) 分析

(1)定量分析

关心的是分析系统相对于某个输入信号的响应和性能。涉及到复杂计算。

(2)定性分析

着重分析如稳定性、可控性、可观性等系统的基本结构特性。这种分析对系统的综合具有重要的指导性，因此在线性系统理论中占有重要位置。

d) 综合

当系统的性能不够令人满意而需加以改善和实现最优化时，就需要按系统的状况和期望的性能要求来设计系统的控制器，即为综合。



## 四. 线性系统理论的发展过程

a) 50 年代中期，经典线性系统理论已发展成熟，对于单输入——单输出线性定常系统的分析、综合有效。

局限性：难于有效地处理多输入—多输出，并且难以揭示系统更深刻的特性。

b) 1960 年前后开始了从经典阶段到现代阶段的过渡。

- 重要标志之一：**Kalman** 系统地把状态空间法引入到系统与控制理论中来。

状态空间法适用于：单、多变量、线性定常、时变系统。

- 在状态空间法上，**Kalman** 进一步提出了可控性和可观性，这是线性系统理论中两个最基本的概念，其引入导致了线性系统分析和综合在指导原则上的一种根本性的变化。

- 建立在状态空间法基础上的线性系统的分析和综合方法通常称为现代线性系统理论。

c) 60 年代中期后：几何代数理论，多变量频域方法。

## 五. 研究内容

a) 定量分析

对系统运动规律进行精确的研究，即定量确定系统由外部激励作用引起的响应。



### b) 定性分析

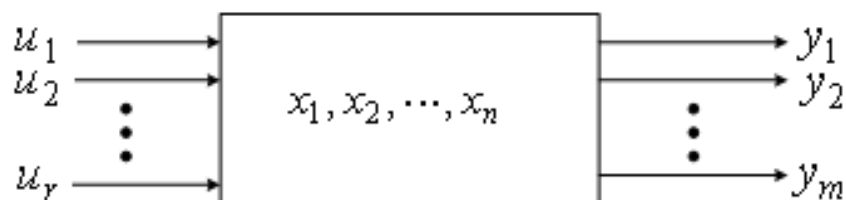
着重对决定系统行为具有重要意义的几个关键性质，如可控性、可观性和稳定性等进行定性研究。

### c) 综合

极点配置与状态观测器。

## §7.2 状态空间模型

### 一. 动态过程数学描述的两种基本类型



- 方块以外的部分为系统环境。
- 环境对系统的作用为系统输入  $u_1, \dots, u_r$ ，系统对环境的作用为系统输出  $y_1, \dots, y_r$ ，这些是系统的外部变量。



- 用以刻画系统在每个时刻所处状况的变量是系统的内部变量  $x_1, \dots, x_n$ ，它随时间的变化体现了系统的行为。
- 系统的数学模型就是反映系统变量之间因果关系和变换关系的一种数学模型。

随着选取不同的变量组间的因果关系来表征系统的动态过程，系统数学描述可区分为两种基本的类型。

### 1. 外部描述——输入输出描述

把系统视为黑箱——一种不完全的描述。

### 2. 内部描述——状态空间描述

(1) 反映  $x_1, \dots, x_n$  和  $u_1, \dots, u_r$  间关系——状态方程

(2) 反映  $y_1, \dots, y_r$  和  $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r$  间关系——输出方程  
——系统的一种完全的描述

## 二. 状态和状态空间

### 1. 状态

完全地表征系统时间域行为的一个最小内部变量组。



已知 $t_0$ 时状态， $t \geq t_0$ 时的输入，可确定 $t \geq t_0$ 时任一变量的运动状况。

可见，系统在 $t_0$ 时刻的初始条件总和，即为系统在 $t = t_0$ 时的状态。

用来确定系统状态的最小一组变量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 为状态变量

$X(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ 为状态向量。

## 2. 状态空间

由 $X(t)$ 张成的 $n$ 维向量空间。

——对于确定的某个时刻，状态表示为状态空间中一个点，状态随时间的变化过程，构成了状态空间中的一条轨迹。

## 三. 系统的状态空间模型

### 1. 状态方程

外部描述法：用一个高阶微分方程描述系统动态特性。

状态空间法：用一组一阶微分方程，

描述系统状态变量与输入间关系的一阶微分方程组称为状态方程：



$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{线性时不变系统})$$

其中,  $x$ —— $n$ 维状态向量

$u$ —— $r$ 维输入向量

$A$ —— $n \times n$ 方阵, 称为系统矩阵

$B$ —— $n \times r$ 矩阵, 称为输入控制阵

## 2. 输出方程

描述系统输出与状态和输入间关系的方程组成为输出方程:

$$y = Cx + Du$$

其中,  $y$ —— $m$ 维输出向量

$C$ —— $m \times n$ 矩阵, 称为输出矩阵

$D$ —— $m \times r$ 矩阵

——线性时不变系统 $(A, B, C, D)$ , 线性时变系统 $(A(t), B(t), C(t), D(t))$





例 1. 求右图 RLC 网络的数学模型。

解：

$$(1) \begin{cases} L \frac{di}{dt} + R \cdot i + u_c = u_i \\ C \cdot \frac{du_c}{dt} = i \end{cases}$$

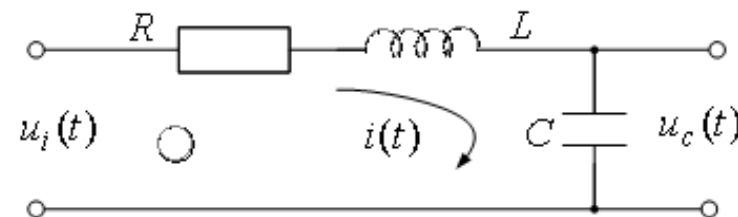
$$\rightarrow LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_c}{dt} + u_c = u_i \text{——二阶微分方程}$$

$$T(s) = \frac{U_c(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$$

(2) 若  $i(t)$ 、 $u_c(t)$  的初值  $i(t_0)$ 、 $u_c(t_0)$  和  $t \geq t_0$  的输入电压  $u_i(t)$  已知，

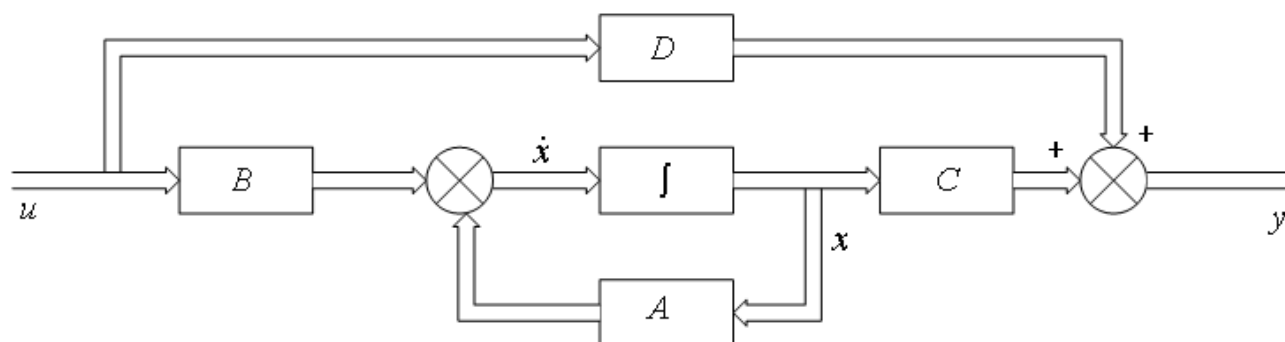
则  $t \geq t_0$  时网络的状态可由  $i(t)$ ， $u_c(t)$  决定

$\therefore$  设  $i(t)$ ， $u_c(t)$  为状态变量



$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [u_i] \\ u_c = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i \\ u_c \end{bmatrix} + [0][u_i] \end{cases}$$

### 3. 方框图



$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases} \quad \text{非线性、时变系统}$$



## §7.3 动态方程求解

已知:系统的初始条件  $x(0)$  和输入  $u(t)$

### 一. 频域解法

#### 1. 状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\xrightarrow{L} sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$\longrightarrow (sI - A)X(s) = X(0) + BU(s)$$

$$\longrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}[X(0) + BU(s)]$$

设  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  —— 预解矩阵

$$\text{则 } X(s) = \Phi(s)X(0) + \Phi(s)BU(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} x(t) = \underbrace{L^{-1}[\Phi(s)X(0)]}_{\text{零输入分量}} + \underbrace{L^{-1}[\Phi(s)BU(s)]}_{\text{零状态分量}}$$

#### 2. 输出方程



$$\begin{aligned}
 y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\
 \xrightarrow{L} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\
 &= C\Phi(s)X(0) + C\Phi(s)BU(s) + DU(s) \\
 &= \underbrace{C\Phi(s)X(0)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{[C\Phi(s)B + D]U(s)}_{\text{零状态响应}}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y(t) = L^{-1}[C\Phi(s)X(0)] + L^{-1}[C\Phi(s)B + D]U(s)$$

零状态：  $Y(s) = [C\Phi(s)B + D]U(s) = G(s)U(s)$

$\therefore G(s) = Y(s)U^{-1}(s) = C\Phi(s)B + D$ ——— 传函矩阵

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

$\therefore |sI - A| = 0$ ，为闭环系统的极点，即为闭环特征方程的特征根。

例 2. 已知系统的状态矢量  $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ,  $X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} -12 & \frac{2}{3} \\ -36 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ , 输入为  $U(t)$ ,

求  $X(t)$ 。



$$\text{解: } (sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & \frac{2}{3} \\ -36 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+12 & -\frac{2}{3} \\ 36 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow BU(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\therefore X(s) = \Phi(s)[X(0) + BU(s)]$$

$$= \Phi(s) \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} \right\} = \Phi(s) \cdot \begin{bmatrix} \frac{6s+1}{3s} \\ \frac{s+1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1/36}{s} - \frac{21/20}{s+4} + \frac{138/45}{s+9} \\ -\frac{63/s}{s+4} + \frac{68/s}{s+9} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{36} - \frac{21}{20}e^{-4t} + \frac{138}{45}e^{-9t})U(t) \\ (-\frac{63}{5}e^{-4t} + \frac{68}{5}e^{-9t})U(t) \end{bmatrix} \text{即状态响应。}$$



例 3. 已知  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $G(s)$ 。

解:  $G(s) = C\Phi(s)B + D = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+4}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2(s-2)}{(s+1)(s+2)} & \frac{s^2+5s+2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = [G_{ij}]$

$y_3$  与  $u_2$  间的传递函数为  $G_{32} = \frac{s^2+5s+2}{(s+1)(s+2)}$  ——程序化（傻瓜相机）

## 二. 时域解法

### 1. 状态方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$



$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{\otimes e^{-At}} e^{-At} \cdot \left[ \dot{x}(t) - Ax(t) \right] = e^{-At} \cdot Bu(t) \\
&\rightarrow \frac{d}{dt} [e^{-At} \cdot x(t)] = e^{-At} \cdot Bu(t) \\
&\xrightarrow{\int_0^t} e^{-At} \cdot x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau \\
&\rightarrow x(t) = \underbrace{e^{At} \cdot x(0)}_{\text{零输入}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{零状态}}
\end{aligned}$$

其中  $e^{At}$  称为矩阵指数：

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

性质：  $\frac{de^{At}}{dt} = A \cdot e^{At}$ ,  $e^{A \cdot 0} = I$ ,  $e^{-At} \cdot e^{At} = e^{At} \cdot e^{-At} = I$

## 2. 状态转移矩阵

$$\begin{aligned}
(1) \quad x(t) &= L^{-1} [\Phi(s)x(0)] + L^{-1} [\Phi(s)BU(s)] \text{——频} \\
&= e^{At} \cdot x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot U(\tau) d\tau \text{——时} \\
&\rightarrow \Phi(s) = L[e^{At}] \text{ 又 } \Phi(s) = (sI - A)^{-1}
\end{aligned}$$



$$\therefore \Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$\rightarrow x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t) * Bu(t)$$

$$\because u(\tau) = 0 \text{ 时, 零输入 } x(t) = \Phi(t)x(0)$$

$$\therefore \Phi(t) \text{ 为状态转移矩阵。}$$

## (2) $\Phi(t)$ 的性质

$$\text{a. } \Phi(0) = e^{A \cdot 0} = I$$

$$\text{b. } \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

$$\text{c. } \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1) \cdot \Phi(t_1 - t_0)$$

$$\text{d. } \Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2)$$

$$\text{e. } [\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$$

## 3. 输出方程的解

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ &= C[\Phi(t)x(0) + \Phi(t) * Bu(t)] + Du(t) \quad , \quad \text{其中 } \Delta = \begin{bmatrix} \delta(t) & & O \\ & \ddots & \\ O & & \delta(t) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{C\Phi(t)x(0)}_{\text{零输入}} + \underbrace{[C\Phi(t)B + D \cdot \Delta(t)]}_{\text{零状态}} * u(t) \end{aligned}$$





## §7.4 系统的可控性与可观测性

### ● 传统控制理论

- \* 只限定讨论  $r$  对  $c$  的控制，二者关系由  $T(s)$  决定。

只要  $T(s) \neq 0$ ，系统的输出量  $c$  是可控的 —— 无可控性问题

- \* 系统的输出量就是被控量，对一个实际的物理系统，它总是可以直接量测的 —— 无可观测问题

### ● 状态空间理论

除输入  $u$ ，输出  $y$ ，还有状态  $x$

把  $x$  看作系统的被控量，就产生了状态能否被输入控制及能否由输出观测出来的问题。

- \* 能否控制一个处于某个给定状况下的系统，加上控制输入，使之在有限时间间隔内达到其零状态？ → 可控态

- \* 零状态  $\xrightarrow[u]{[t_0, t_f]}$  希望的状态？ → 可达态

- \* 给定一个未知状态的系统，能否根据  $[t_0, t_f]$  测到输出  $y$  去观测它的特征？ → 可观测态

☆ 对线性连续时间系统，可控  $\Leftrightarrow$  可达



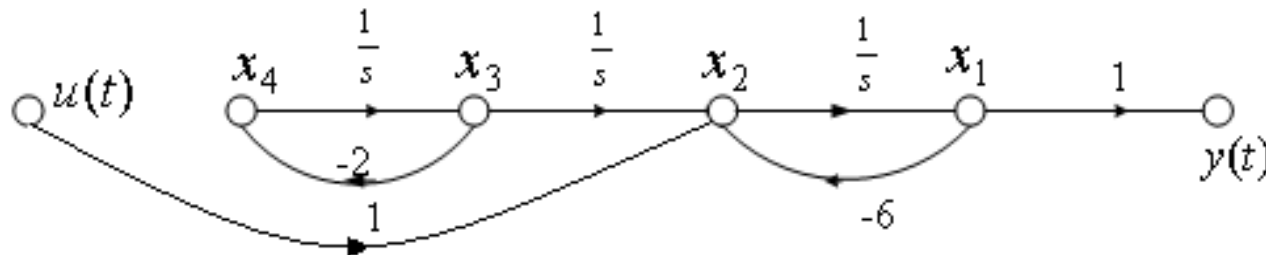
## 一. 可控性

系统这个黑箱内部的每一个状态变量的运动都可由输入来控制而作任意转移——可控。

### 1. 定义

若存在控制向量 $u(t)$ ，对于任意时刻 $t_0$ 和 $t_f$ ，能将 $t = t_0$ 的每个初始状态转移到 $t = t_f$ 的另一状态，则完全可控 $\Leftrightarrow$ 若对任意状态 $x(t_0)$ ，存在一个有限时刻 $t_f > t_0$ 和控制量 $u(t)$ ，能在 $t_f$ 时刻将状态 $x(t_0)$ 转移到0，则称此系统的状态完全可控。

右图： $x_3, x_4$ 不可控， $\rightarrow$ 此系统不可控



### 2. 状态可控条件

$$\text{令 } x(t_f) = \Phi(t_f)x(t_0) + \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau)Bu(\tau)d\tau = 0$$

若能找到 $u(t)$ 满足上式，则系统可控（找出 $x(t_0)$ 与 $u(\tau)$ 的一一对应关系）



$$\because x(t_0) = -\Phi^{-1}(t_f) \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau) B u(\tau) d\tau$$

$$\Phi^{-1}(t_f) \Phi(t_f - \tau) = \Phi(-\tau)$$

$$\therefore x(t_0) = -\int_0^{t_f} \Phi(-\tau) B u(\tau) d\tau$$

$$\because \Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k$$

且由凯莱—哈密顿定理：  $A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{kj} \cdot A^j$

$$\begin{aligned} \therefore \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{kj} \cdot A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} A^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kj} \cdot \frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} A^j \cdot \alpha_j(t), \quad \alpha_j(t) \text{ 为标量函数} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Phi(-\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(-\tau) \cdot A^j$$

$$\therefore x(t_0) = -\sum_{j=0}^{n-1} A^j \cdot B \cdot \underbrace{\int_0^{t_f} \alpha_j(-\tau) u(\tau) d\tau}_{\xrightarrow{\Delta} U_j} = -\sum_{j=0}^{n-1} A^j \cdot B \cdot U_j$$



$$\rightarrow x(t_0) = -[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} \text{有解}$$

$$\Leftrightarrow |B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B| \neq 0 \rightarrow x(t) = f(u(\tau))$$

$$\text{这时} \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = -[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]^{-1} \cdot x(t_0) \text{成立, } \rightarrow u(t) = f(U_j) \text{存在}$$

$$x(t_0) \xrightarrow{u(\tau)} x(t_f) = 0 \Leftrightarrow \text{系统可控}$$

$$Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \text{——可控性阵}$$

系统可控条件为:  $\text{rank } Q_c = n$  或  $|Q_c| \neq 0$

$$\text{例 5. ① } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \text{ 可控否?}$$

$$\text{解: } n = 2, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$



$\text{rank } Q_c = 1 < 2 \rightarrow \text{不可控}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$\rightarrow \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) \rightarrow \text{不受 } u(t) \text{ 控制}$$

$$\textcircled{2} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \text{ 可控否?}$$

$$\text{解: } n = 2, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } Q_c = 2 \rightarrow \text{可控}$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)$$

$$x_1 \sim x_2 \sim u(t)$$

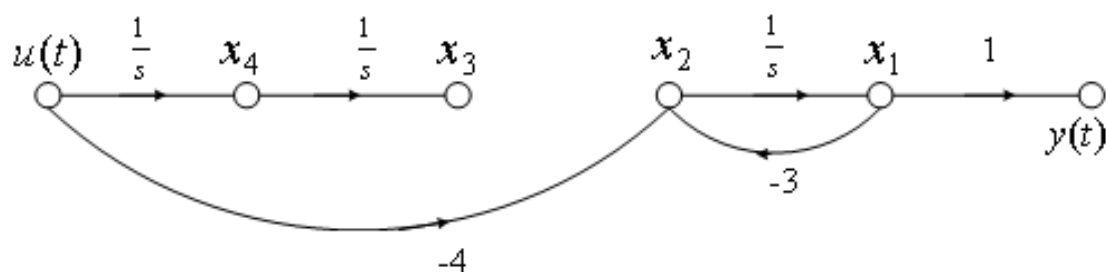


## 二. 可观测性

### 1. 定义

若  $u(t)$  已知，能由  $t_0 \leq t \leq t_f$  内的输出测量值  $y(t)$  唯一地确定任意时刻的状态  $x(t_0)$ ，则系统可观测  $\Leftrightarrow$  黑箱内所有状态变量的任意形式的运动均可由输出反映。

右图：  $x_3, x_4$  不可测



### 2. 可观测性条件

$$Q_o = [C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T \text{——可观测阵}$$

$$\text{rank } Q_o = n \Leftrightarrow \text{系统可观}$$



## §7.5 线性变换与标准形

### 一. 系统动态方程的不唯一性

系统 I

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned}$$

系统 II

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A} \cdot \bar{x}(t) + \bar{B} \cdot u(t) \\ \bar{y}(t) &= \bar{C} \cdot \bar{x}(t) + \bar{D} \cdot u(t) \end{aligned}$$

代数等价  $\bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}, \bar{D} = D$

### 二. 代数等价系统的性质

#### 1. 特征值的不变性

$$A \rightarrow \bar{A} = PAP^{-1}$$

$$\begin{aligned} |sI - \bar{A}| &= |sI - PAP^{-1}| = |sIPP^{-1} - PAP^{-1}| \\ &= |P(sI - A)P^{-1}| = |P| \cdot |P^{-1}| \cdot |sI - A| = |sI - A| \end{aligned}$$

#### 2. 可控、可观测性不变

#### 3. 输入输出关系不变



### 三. 标准形

\* 标准形的重要意义：

- 可把系统某些特性表现得更充分、明显，七个系数矩阵元素形式十分简洁，便于分析和综合——便于使用计算机辅助计算。

#### 1. 可控标准形

$$\psi(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

选变换阵  $P = (Q_c L)^{-1}$ ,

$$Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B], \quad L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

将  $(A, B, C) \rightarrow (A_c, B_c, C_c)$





$$\text{而 } A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

## 2. 可观测标准形

$$\text{选 } P = LQ_o, \quad Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_o = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

单输入——单输出系统传函

$$G(s) = C\Phi(s)B$$



$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} = \frac{\gamma_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \gamma_1s + \gamma_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}, \quad \gamma_i = \beta_i$$

### 3. 对角标准形

$$G(s) = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - s_n}$$

$$A_D = \begin{bmatrix} s_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & s_n \end{bmatrix}, \quad B_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_D = [C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_n]$$

## §7.6 状态反馈理论及观测器

- 反馈控制  $\begin{cases} \text{输出反馈: 极点配置服从根轨迹} \\ \text{状态反馈: 可做到闭环极点任意配置} \end{cases}$

控制信号  $u(t) = f(r(t), x(t), t)$  —— 控制规律

对线性时不变:  $u(t) = Hx + Kr$

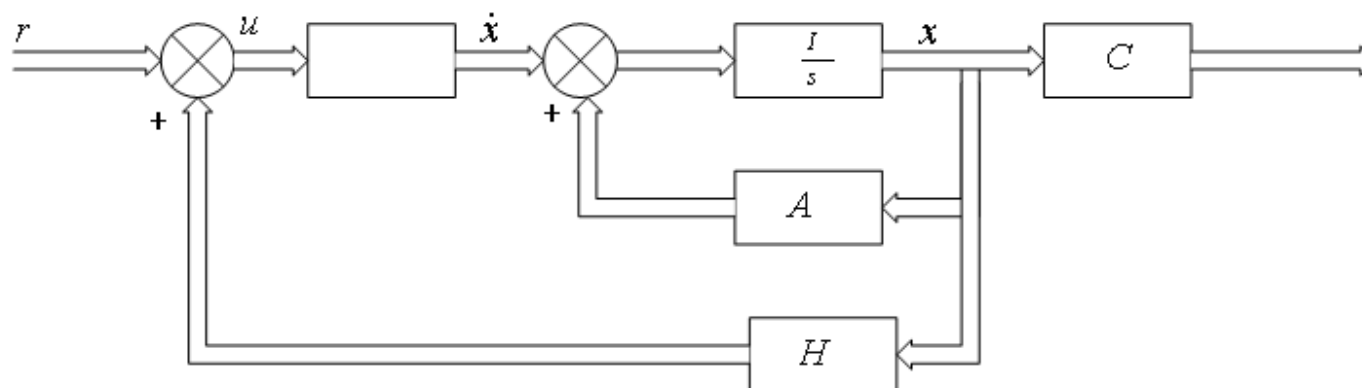
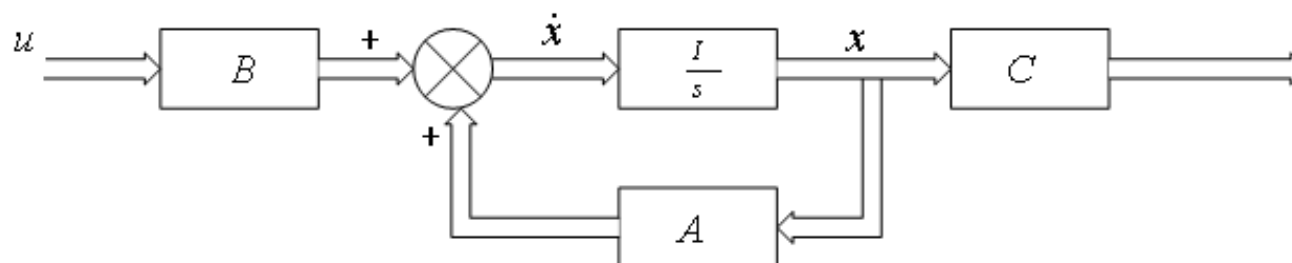
线性时不变输出反馈:  $e(t) = r(t) - c(t) * h(t)$



## 一. 状态反馈

线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$



加状态反馈后，控制变量

$$u = Hx + r$$

闭环系统得状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(Hx + r) = (A + BH)x + Br$$

$$y = Cx$$

状态阵为  $A + BH$

## 二. 极点配置

通过选择  $H$ ，使闭环极点在希望的点上达到要求

状态可控  $\Leftrightarrow$  闭环系统的极点可任意配置

$\Rightarrow$  一定可变为  $(A_c, B_c, C_c)$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$C_c = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\text{设 } H = [h_0 \quad h_1 \quad \cdots \quad h_{n-1}]$$

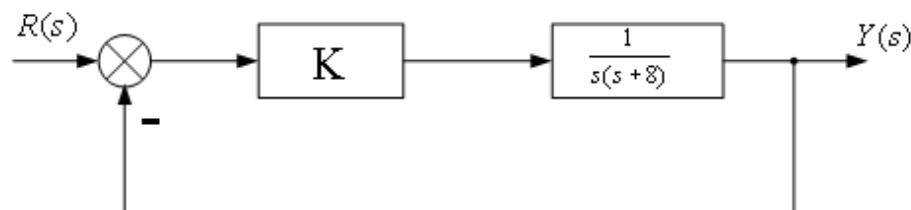
$$\text{则 } A_c + B_c H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -(a_0 - h_0) & -(a_1 - h_1) & \cdots & \cdots & -(a_{n-1} - h_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + (a_{n-1} - h_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - h_1)s + (a_0 - h_0)}$$

例 6（例 7-12）某手控雷达角跟踪系统的开环传函可近似地表示为  $G(s) = \frac{k}{s(s+8)}$ 。若要求系

统的  $M_p \leq 4\%$ ，试用输出反馈和状态反馈两种方法设计系统，并分析系统的性能





解：①输出反馈  $T(s) = \frac{k}{s^2 + 8s + k} = \frac{k}{s^2 + a_1s + a_0}$

由  $M_p = 4\% \rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  时,  $2\xi\omega_n = 8 \rightarrow \omega_n = 4\sqrt{2}$ ,  $K = \omega_n^2 = 32$  时

$$\therefore T(s) = \frac{32}{s^2 + 8s + 32}$$

指标:  $t_p = 0.79s, t_s = 1s, \omega_B = \omega_n \cdot f(\xi) = 5.66$

$$e_{sp} \xrightarrow{I型} 0$$

$$e_{sv} = \frac{1}{k_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s+8}} = \frac{8}{k} = 0.25$$

提高快速性 + 减少  $e_{ss} \rightarrow K \uparrow \rightarrow \omega_n \uparrow \rightarrow \xi \downarrow \rightarrow M_p$

输出反馈只调  $k$  的局限性。



②状态反馈 
$$T(s) = \frac{K}{s^2 + a'_1 s + a'_0}$$

在  $M_p = 4\% \rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  时, 使  $\omega_n \uparrow$ , 如  $\omega_n = 35\sqrt{2}$  时

$$a'_1 = 2\xi\omega_n = 70, \quad a'_0 = \omega_n^2 = 2450$$

$$\therefore \text{闭环传递函数为 } T(s) = \frac{2450}{s^2 + 70s + 2450}$$

为实现状态反馈, 设反馈阵  $H = [h_0 \quad h_1]$ ,

$$\text{则状态反馈系统的传递函数为 } T(s) = \frac{k}{s^2 + (a_1 - h_1)s + (a_0 - h_0)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s}, a_1 = 8, a_0 = 0$$

$$\therefore K = 2450, a_1 - h_1 = 70 \rightarrow h_1 = 62, \quad a_0 - h_0 = 2450 \rightarrow h_0 = -2450$$

$$\text{指标: } t_p = 0.09s, t_s = 0.114s, \quad \omega_n = 49.5, \quad e_{sp} = 0, e_{sv} = 0.028$$

• 实现结构图:

① 为实现状态反馈, 需求可控标准形



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2450 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -8x_2 + u \\ y = x_1 \cdot 2450 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{s} x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{s+8} u \\ y = x_1 \end{cases}$$

未状态反馈钱的结构图为



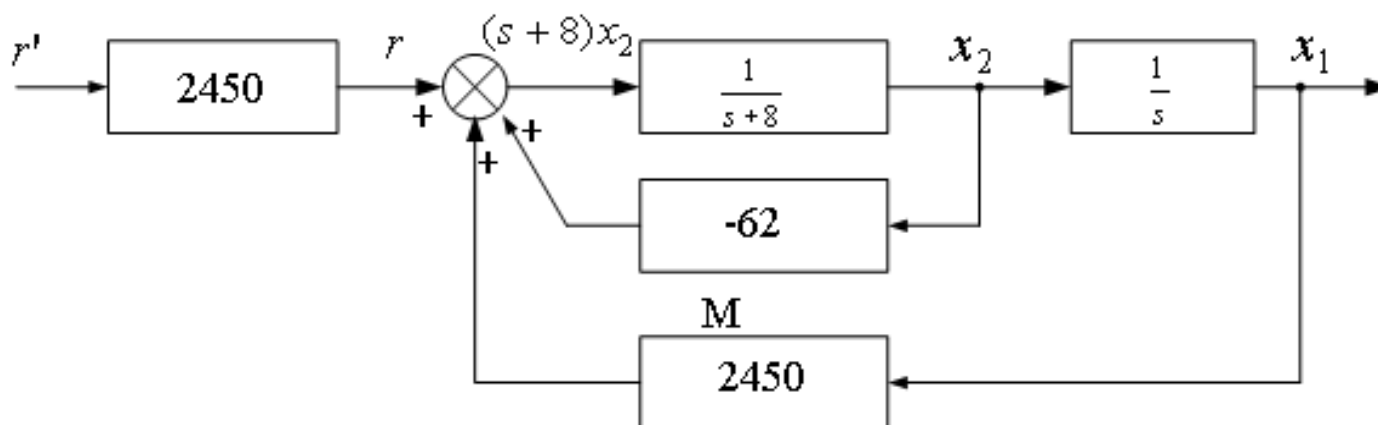
$$\textcircled{2} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a_0 - h_0) & -(a_1 - h_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$





$$y = \begin{bmatrix} 2450 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

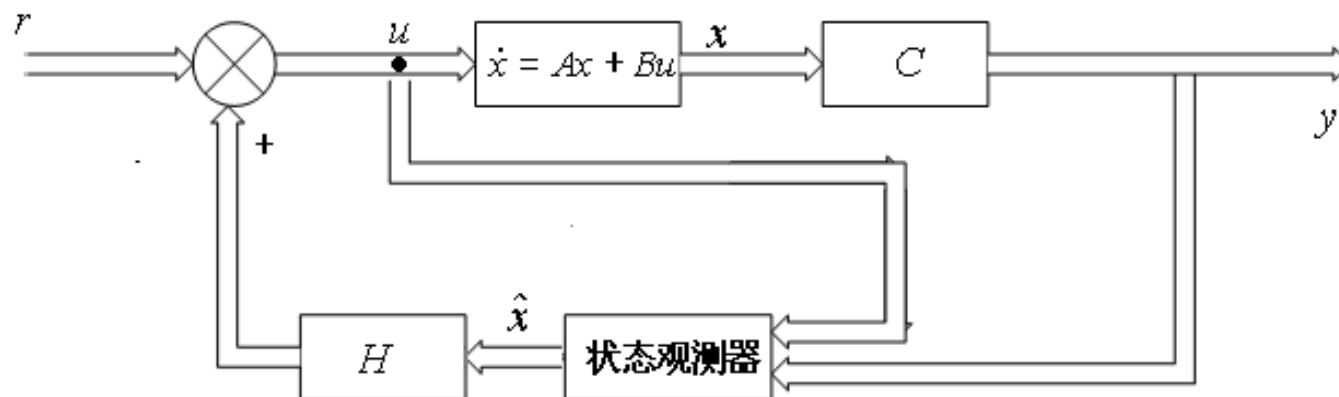
$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(a_0 - h_0)x_1 - (a_1 - h_1)x_2 + r = -a_0x_1 - a_1x_2 + h_0x_1 + h_1x_2 + r = -8x_2 + h_0x_1 + h_1x_2 + r \\ y = x_1 \cdot 2450 \end{cases}$$



### 三. 观测器

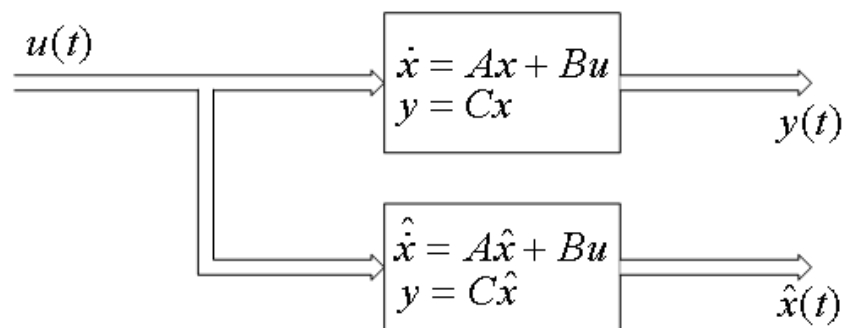
- 用观测器实现状态反馈的结构：





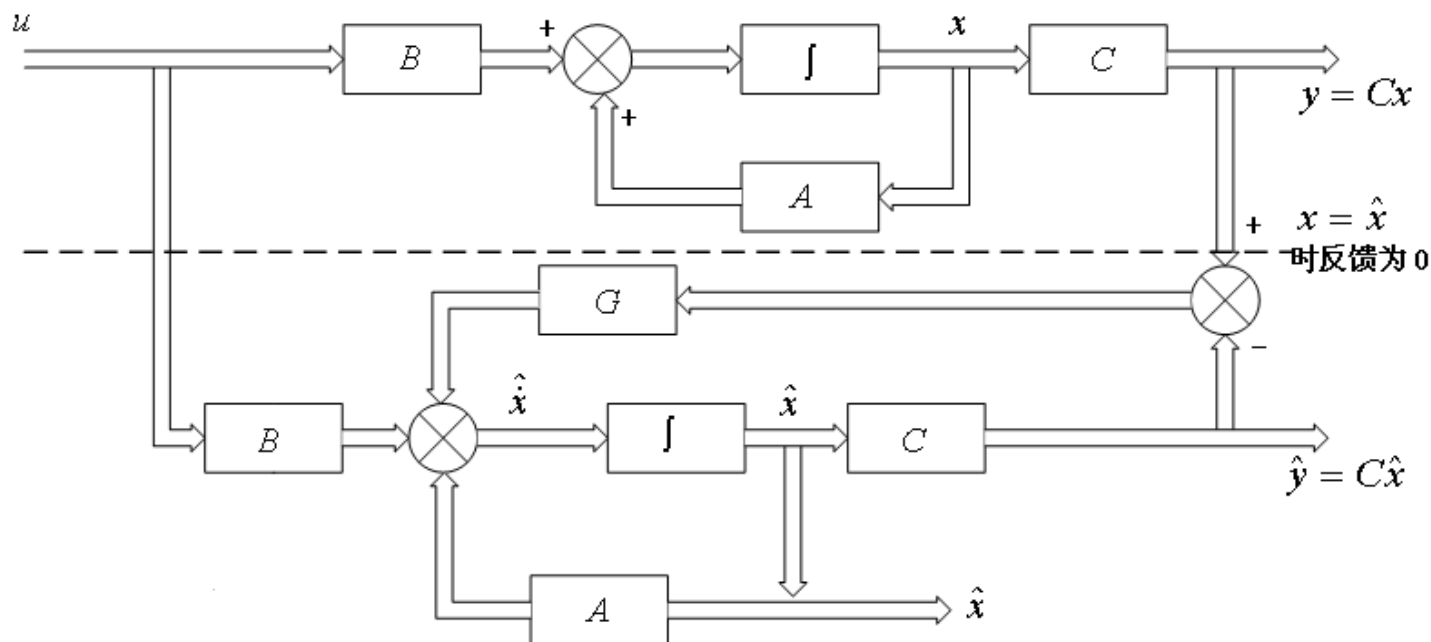
### 1. 开环观测器

若  $\hat{x}(0) = x(0)$ ，则对所有  $t$ ，此模型可提供准确估值： $\hat{x}(t) = x(t)$



### 2. 闭环估计





从图可见：

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x}) \\ &= A\hat{x} + Bu + GCx - GC\hat{x} \\ &= (A - GC)\hat{x} + GY + Bu\end{aligned}$$

估计误差  $e = x - \hat{x}$



$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A - GC)\hat{x} - GY - Bu \\ &= Ax - GCx - (A - GC)\hat{x} = (A - GC)(x - \hat{x}) = (A - GC)e\end{aligned}$$

$$\dot{e} - (A - GC)e = 0$$

$$\text{特征方程: } |\lambda I - (A - GC)| = 0$$

$$\text{解: } e(t) = e^{(A - GC)t} \cdot x(0)$$

若要  $e(t) \rightarrow 0$ , 需选  $G$ , 使  $A - GC$  的特征值有负实部。可观系统  $(A_o, B_o, C_o)$

$$\rightarrow A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C_o = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

$$\text{设 } G_o = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{则 } A_o - GC_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -(a_0 + g_0) \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & -(a_1 + g_1) \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -(a_{n-1} + g_{n-1}) \end{bmatrix}$$



## → 例 7—13

