

第五章 频域分析法

● 目的：

- ①直观，对高频干扰的抑制能力。对快(高频)、慢(低频)信号的跟踪能力。
- ②便于系统的分析与设计。
- ③易于用实验法定传函。

§ 5.1 频率特性

一. 定义

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{(s + p_1) \cdots (s + p_n)}$$

在系统输入端加一个正弦信号： $r(t) = R_m \cdot \sin \omega t$

$$\leftrightarrow R(s) = \frac{R_m \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{R_m \cdot \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$

$$\text{系统输出: } Y(s) = \frac{\theta(s)}{(s + p_1) \cdots (s + p_n)} \cdot \frac{R_m \cdot \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$



$$\leftrightarrow y(t) = \underbrace{y_1(t)}_{\text{瞬态响应}} + A \cdot e^{-j\omega t} + \bar{A} \cdot e^{j\omega t}$$

若系统稳定，即 $G(s)$ 的极点全位于 s 左半平面，则 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$

稳态响应为：

$$y_{ss}(t) = A \cdot e^{-j\omega t} + \bar{A} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\text{而 } A = G(s) \cdot \frac{R_m \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} \cdot (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{1}{2j} R_m \cdot G(-j\omega)$$

$$\bar{A} = G(s) \cdot \frac{R_m \cdot \omega}{s^2 + \omega^2} \cdot (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{2j} R_m \cdot G(j\omega)$$

$$\begin{aligned} \therefore y_{ss}(t) &= -\frac{1}{2j} R_m \cdot G(-j\omega) \cdot e^{-j\omega t} + \frac{1}{2j} R_m \cdot G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \\ &= \frac{1}{2j} R_m \cdot [G(j\omega) \cdot e^{j\omega t} - G(-j\omega) \cdot e^{-j\omega t}] \end{aligned}$$

又 $G(s)$ 为 s 的有理函数，故 $G(j\omega) = G^*(-j\omega)$ ，即



$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

$$G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

$$\begin{aligned}\therefore y_{ss}(t) &= \frac{1}{2j} R_m \cdot |G(-j\omega)| [e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}] \\ &= R_m \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ &= Y_m \cdot \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

可见：对稳定的线性定常系统，加入一个正弦信号，其稳态响应也是一个同频率的正弦信号。其幅值是输入正弦信号幅值的 $|G(j\omega)|$ 倍，其相移为 $\phi = \angle G(j\omega)$ 。

$\therefore G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$ 表示了稳定线性定常系统的稳态输出和输入正弦波之间的关系，故称 $G(j\omega)$ 为频率响应函数。又称 $G(j\omega)$ 为系统的频率特性。

$$\text{可证： } G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (\text{见上面 } A, \bar{A} \text{ 的求法})$$

$$Y(s) = \frac{R_m \cdot |G(j\omega)| \cdot \omega \cdot e^{j\phi}}{s^2 + \omega^2}, \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

即系统正弦稳态响应与其输入量之比称为系统的频率特性。



二. 表示方法

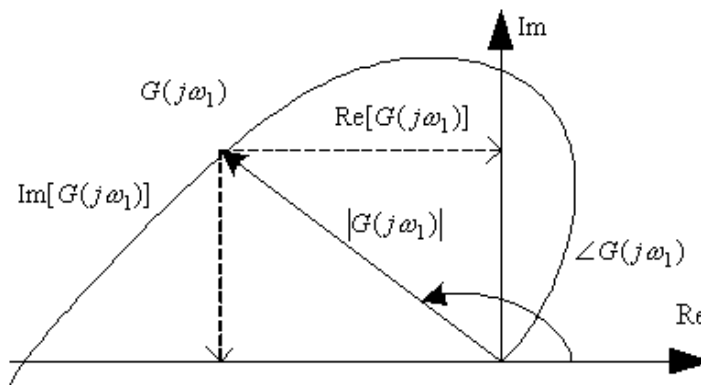
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| \angle G(j\omega) \\ &= A(\omega) e^{j\phi(\omega)} \end{aligned}$$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$, $A(\omega) \sim \omega$ 为系统的幅频特性, $\phi(\omega) \sim \omega$ 为系统的相频特性

1. 极坐标图（奈奎斯特图）（幅相特性图）

$G(j\omega)$ 是复数，亦可看作一个矢量。

ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，矢量 $G(j\omega)$ 的端点在复平面上的运动轨迹



- 正相角按正实轴方向反时针旋转定义。
- 用来表示频率特性 $G(j\omega)$ 的平面称为 G 平面。

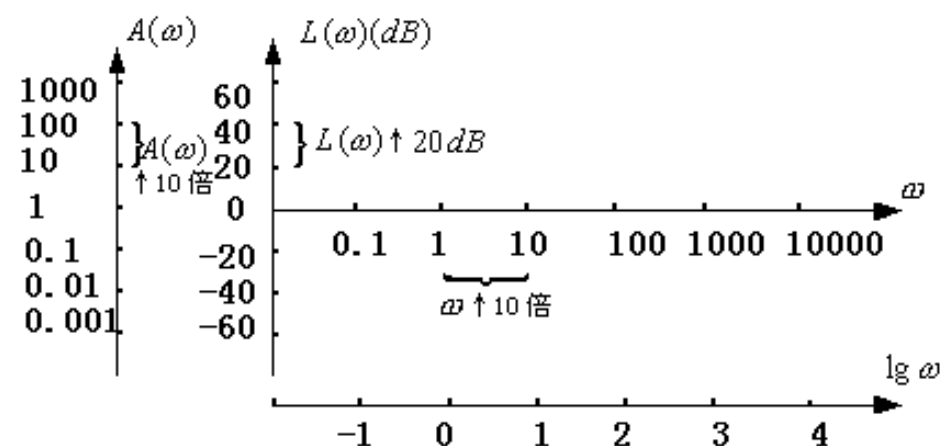
$G(j\omega)$ 的幅相特性是 s 平面上的虚轴通过传递函数 $G(j\omega)$ 在 G 平面上的映射。



2. 对数频率特性（伯德图）

对数幅频特性： $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \sim \omega(\lg \omega)$

相频特性： $\varphi(\omega) \sim \omega(\lg \omega)$



$A(\omega)$ 及 ω 的变化范围太大，故用对数坐标表示。

- 纵坐标是以幅值对数分贝数刻度的，是均匀的；
横坐标按频率对数 $\lg \omega$ 标尺刻度，但标出的是实际的 ω 值，是不均匀的。
——这种坐标系称为半对数坐标系。
- 在横轴上，对应于频率每增大 10 倍的范围，称为十倍频程(dec)，如 1~10，5~50，而 ω 轴上所有十倍频程的长度都是相等的。



- 为了说明对数幅频特性的特点，引进斜率的概念，即横坐标每变化十倍频程（即 $\lg \omega$ 变化）所对应的纵坐标分贝数的变化量，记为 NdB/dec 。

相频特性也是在半对数坐标系上表示。纵坐标相角 $\varphi(\omega)$ 是均匀的，横坐标同上不均匀。

- 基本性质

① 串联环节总的对数幅频特性 $L(\omega) = L_1(\omega) + \dots + L_n(\omega)$

串联环节总的相频特性 $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$

② 互为倒数的传递函数，其 $L(\omega)$ 、 $\varphi(\omega)$ 均以横坐标成镜像对称。

$$G_1(j\omega) = 1/G_2(j\omega)$$

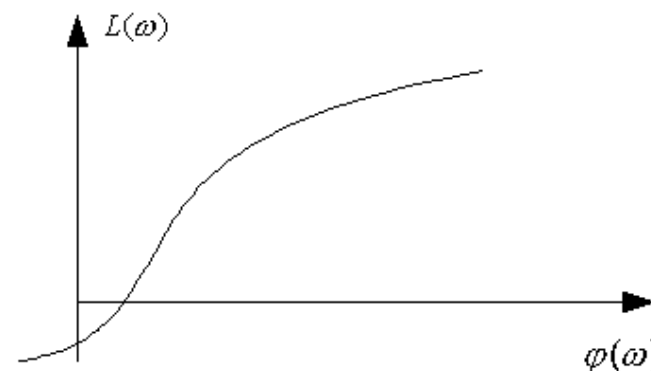
$$\rightarrow 20\lg|G_1(j\omega)| = L_1(\omega) = -20\lg|G_2(j\omega)| = -L_2(\omega)$$

$$\varphi_1(j\omega) = \angle G_1(j\omega) = -\angle G_2(j\omega) = \varphi_2(j\omega)$$

3. 对数幅相图（尼柯尔斯图）

$L(\omega)$ ω 为参数 $\varphi(\omega)$

\therefore 直角坐标系

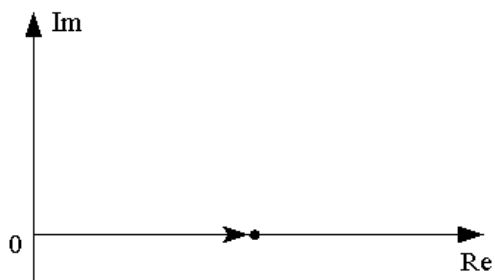


§ 5.2 典型环节的频率特性

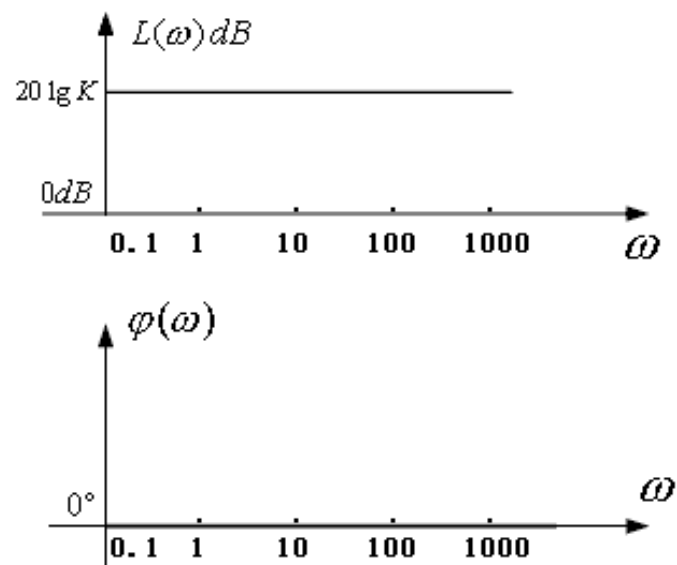
1. 比例环节

$$G(j\omega) = K = K \cdot e^{j0^\circ}$$

$$A(\omega) = K, L(\omega) = 20 \lg K; \quad \varphi(\omega) = 0$$



极坐标图



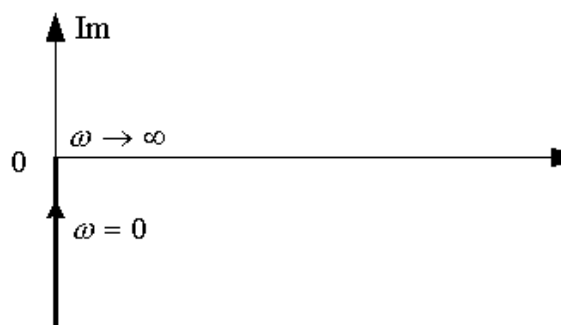
对数坐标图



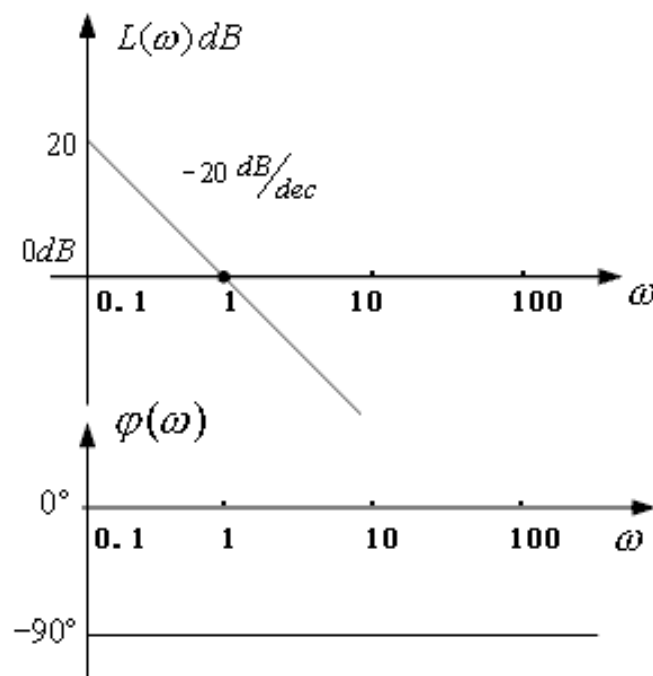
2. 积分环节

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega}, L(\omega) = -20 \lg \omega \Rightarrow \omega \uparrow, L(\omega) \downarrow; \varphi(\omega) = -90^\circ$$



极坐标图



对数坐标图



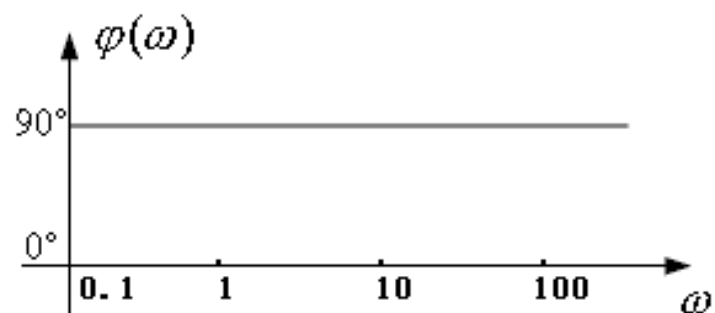
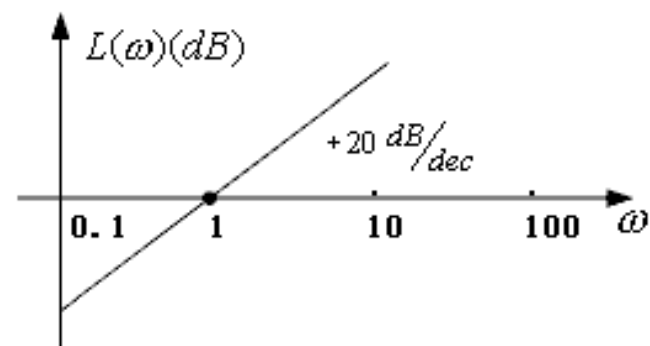
3. 微分环节

$$G(j\omega) = j\omega = \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$A(\omega) = \omega, L(\omega) = 20 \lg \omega, \rightarrow \omega \uparrow, L(\omega) \uparrow; \quad \varphi(\omega) = 90^\circ$$



极坐标图



对数坐标图



4. 惯性环节

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot e^{-jtg^{-1}\omega T}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}, \quad L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T^2};$$

$$\varphi(\omega) = -tg^{-1}\omega T$$

极:

$$\omega = 0, \quad G(j0) = 1 \cdot e^{j0}$$

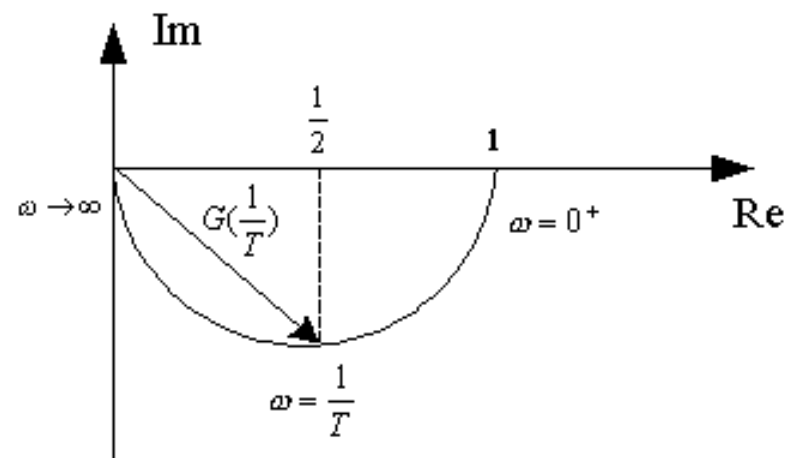
$$\omega = \frac{1}{T}, \quad G(j\frac{1}{T}) = \sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ}$$

$$\omega = \infty, \quad G(j\infty) = 0 \cdot e^{-j90^\circ}$$

对: 近似法

$$\omega T \ll 1, \quad L(\omega) = 0dB$$

$$\omega T \gg 1, \quad L(\omega) = -20 \lg \omega T = -20dB/dec \quad \text{— 二直线交点为 } \omega = \frac{1}{T}$$



$$\omega = \frac{10}{T}, \quad L(\omega) = -20dB = -20\lg 10$$

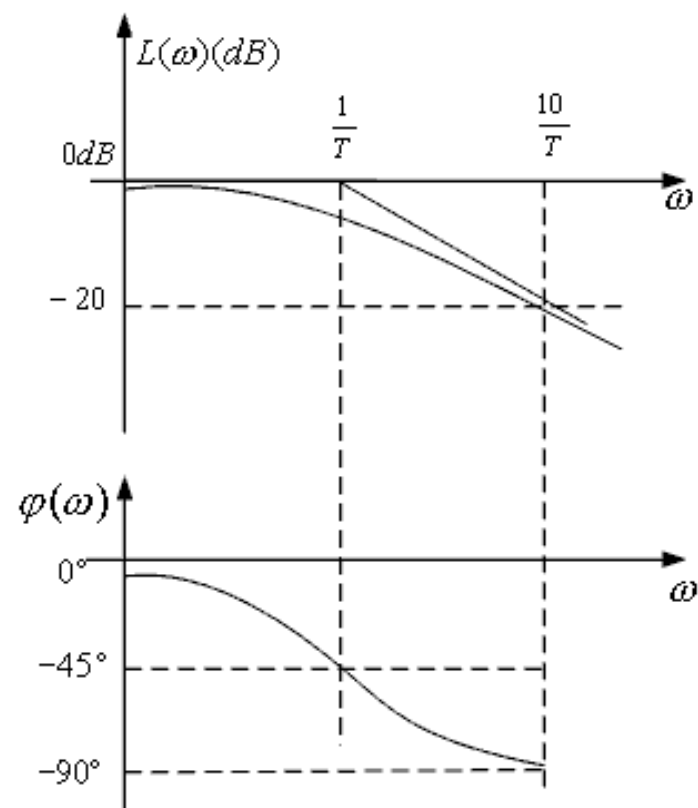
$$\omega = \frac{100}{T}, \quad L(\omega) = -40dB = -20\lg 10^2$$

$$\omega = \frac{10^n}{T}, \quad L(\omega) = -20 \cdot n dB = -20\lg 10^n$$

即 $\omega \uparrow 10$ 倍, $L(\omega) \downarrow 20dB \Rightarrow 20dB/dec$

$$\omega = \frac{1}{T} \text{ (转角频率) 处, } L(\omega) = -20\lg \sqrt{2} = -3dB$$

——最大误差发生处。



5. 一阶微分环节

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cdot e^{j \operatorname{tg}^{-1} \omega T}$$

$$A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T^2},$$

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \omega T$$

极:

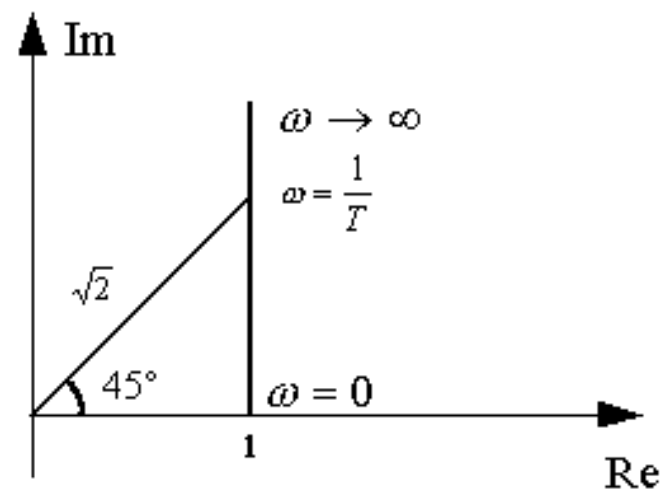
$$\omega = 0, \quad G(j0) = 1 \cdot e^{j0}$$

$$\omega = \frac{1}{T}, \quad G(j\frac{1}{T}) = \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}$$

$$\omega = \infty, \quad G(j\infty) = \infty \cdot e^{j90^\circ}$$

对：与惯性环节成镜像对称。

6. 振荡环节



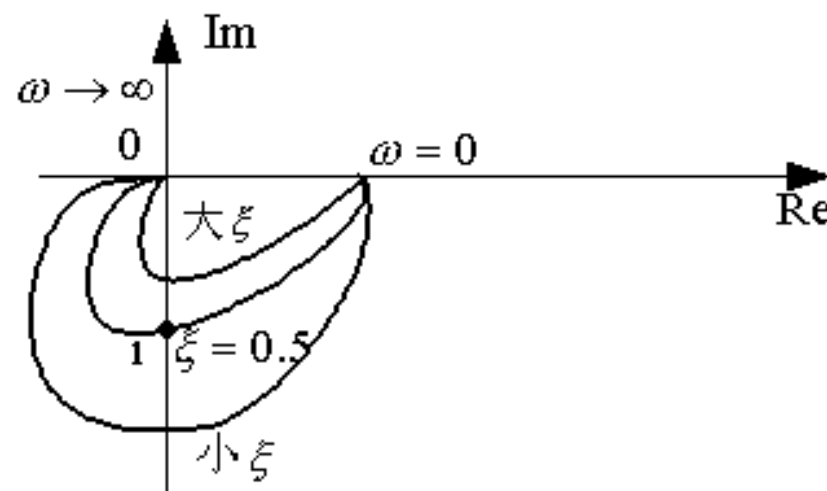
$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{1 + j \cdot 2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \cdot \exp \left[-\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}},$$

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



极:



$$\omega = 0, \quad G(j0) = 1 \cdot e^{j0}$$

$$\omega = \omega_n, \quad G(j\omega_n) = \frac{1}{2\xi} \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$\omega \rightarrow \infty, \quad G(j\infty) = 0 \cdot e^{-j180^\circ}$$

对：

$L(\omega)$ 的渐近线

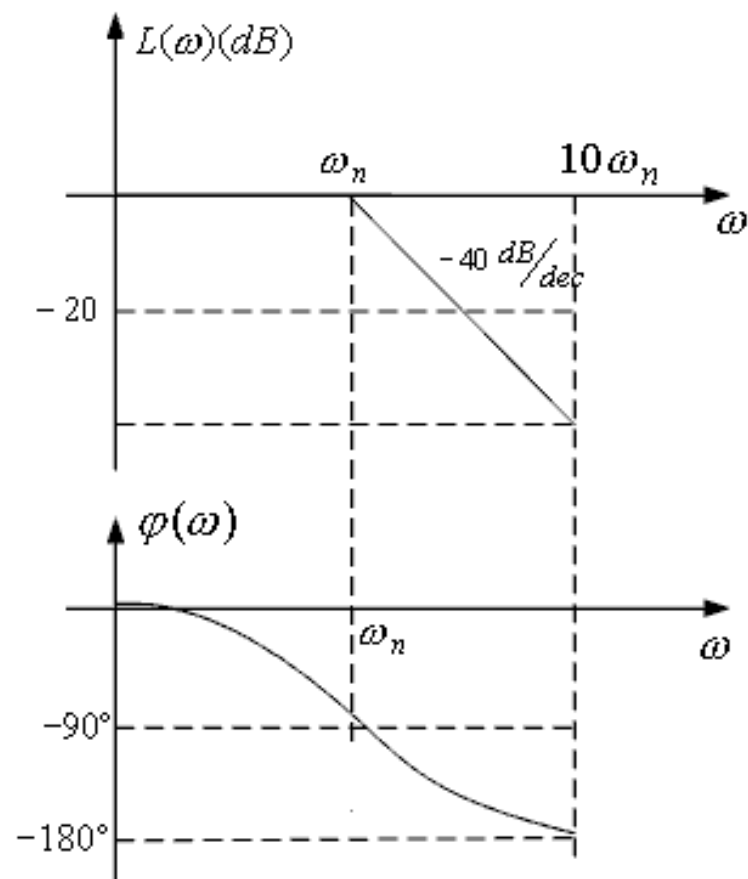
$$\omega \ll \omega_n,$$

$$L(\omega) = 0dB$$

$$\omega \gg \omega_n,$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= -20 \lg \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} \\ &= -40 \lg \frac{\omega}{\omega_n} = -40dB/dec \end{aligned}$$

$\omega = \omega_n$, $L(\omega) = -20 \lg(2\xi)$, 为交接/转角频率。



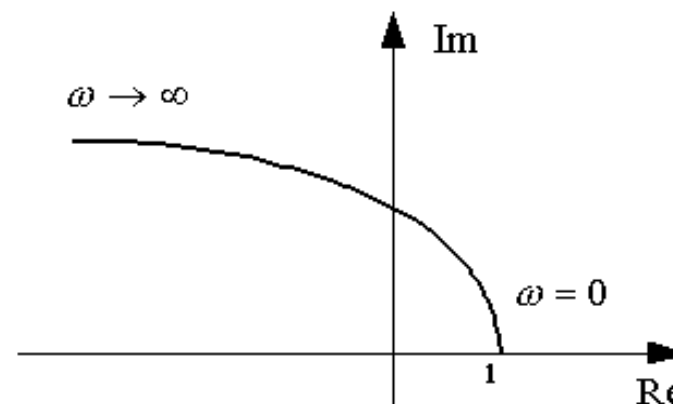
7. 二阶微分环节



$$G(j\omega) = 1 + 2\xi(j\frac{\omega}{\omega_n}) + j(\frac{\omega}{\omega_n})^2$$

极：

对：与振荡环节成镜像对称。



§ 5.3 开环系统的频率特性

一. 开环系统的极坐标图

开环频率特性的一般形式：

$$G(j\omega) = \frac{K_0(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\cdots(1+j\omega\tau_m)\cdots}{(j\omega)^N(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_{n-N})\cdots}$$



1. 由 N 决定 $\omega \rightarrow 0$ 时的形状 $\because \omega \rightarrow 0$ 时

$$\angle(1 + j\omega\tau_i) \rightarrow 0$$

$$\angle\left(\frac{1}{1 + j\omega T_i}\right) \rightarrow 0$$

$$\angle \frac{1}{j\omega} \rightarrow -90^\circ$$

$$\therefore \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega) = N \angle -90^\circ$$

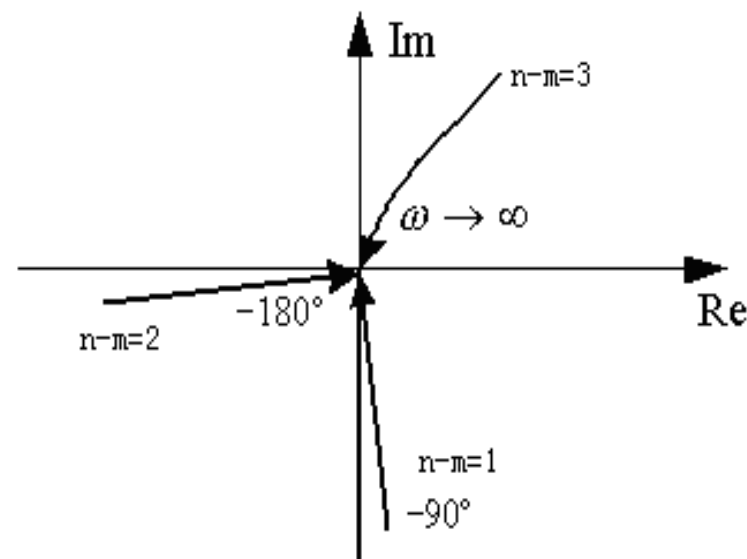
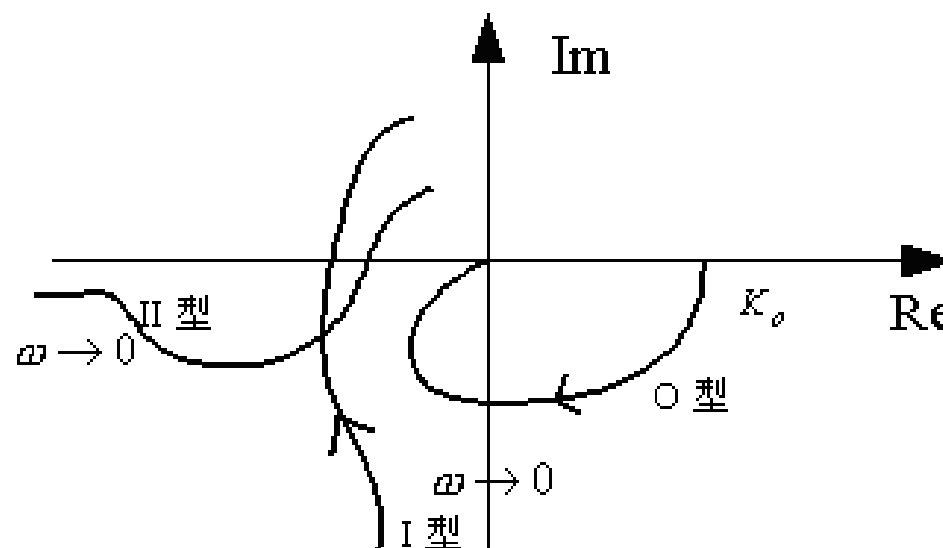
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \begin{cases} K_0, & N = 0 \\ \infty, & N \neq 0 \end{cases}$$

 \Rightarrow

$N = 0$, 0 型系统 $\angle G(j\omega) = 0^\circ$, $|G(j\omega)| = K_0$

$N = 1$, I 型系统 $\angle G(j\omega) = -90^\circ$, $|G(j\omega)| = \infty$

$N = 2$, II 型系统 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$, $|G(j\omega)| = \infty$



2. 由 $m - n$ 决定 $\omega \rightarrow \infty$ 时的形状

$$\because \omega \rightarrow \infty \text{ 时}, \angle(1 + j\omega\tau_i) \rightarrow 90^\circ$$

$$\angle\left(\frac{1}{1 + j\omega\tau_i}\right) \rightarrow -90^\circ$$

$$\angle\frac{1}{j\omega} \rightarrow -90^\circ$$

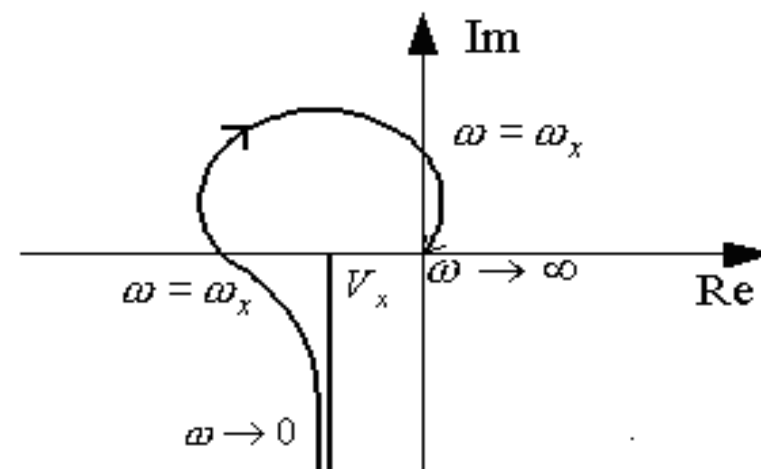
$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) &= m \cdot 90^\circ + N(-90^\circ) + (n - N)(-90^\circ) \\ &= (m - n) \angle 90^\circ\end{aligned}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = \begin{cases} 0 & m < n \\ K_0 & m = n \end{cases}$$

例. 已知 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + jT_1\omega)(1 + jT_2\omega)(1 + jT_3\omega)}$, 求作极坐标图

解: $m = 0, n = 4, N = 1$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \infty \angle -90^\circ$$



$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -360^\circ$$

由 $\operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0$ 可求与虚轴交点处频率 ω_y ,

由 $\operatorname{Im}[G(j\omega)] = 0$ 可求与实轴交点处频率 ω_x ,

代入 $\operatorname{Re}[G(j\omega_x)]$ 及 $\operatorname{Im}[G(j\omega_y)]$ 即与实、虚轴交点

由 $\omega \rightarrow 0$ 时, $|G(j\omega)|$ 沿平行于虚轴的渐近线 $\rightarrow 0$

渐近线与实轴的交点 $V_x = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)]$

二. 开环系统的伯德图

一般规则:

1. 将 $G(j\omega)$ 写成典型环节之积
2. 找出各环节的转角频率
3. 画出各环节的渐近线
4. 在转角频率处修正渐近线得各环节曲线
5. 将各环节曲线相加即 $G(j\omega)$ 的波特图



§ 5.4 频域稳定判据

● 由开环频率特性判别闭环稳定性的方法

● 此法的优点：

① 主要靠作图，计算量很小。

② 不仅能回答闭环系统是否稳定，而且还可以得出系统接近不稳定的程度，称为稳定裕度。

③ 不要求知道系统的微分方程或传递函数，而只要依靠实验测出其开环频率特性就可以。

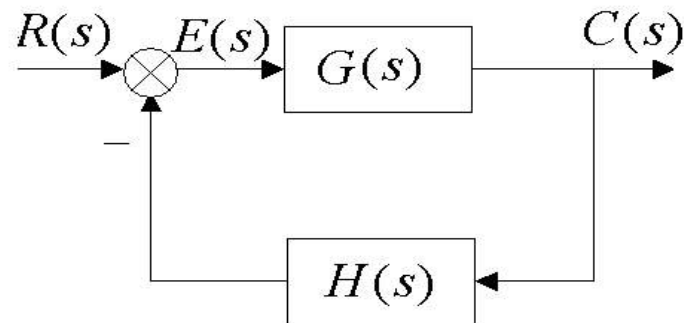
——由于这些重要优点，Nyquist 稳定判据在控制系统稳定性的分析中有十分重要的地位，事实上它是整个频域控制理论的基石。

一. 奈奎斯特稳定判据

1. $F(s)$ 与 $T(s)$ 的关系

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{F(s)}$$

分母



$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)}$$

$$= K \cdot \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

$F(s)$ 极点 = 开环 $G(s)H(s)$ 的极点

$F(s)$ 零点 = 闭环 $T(s)$ 的闭环极点

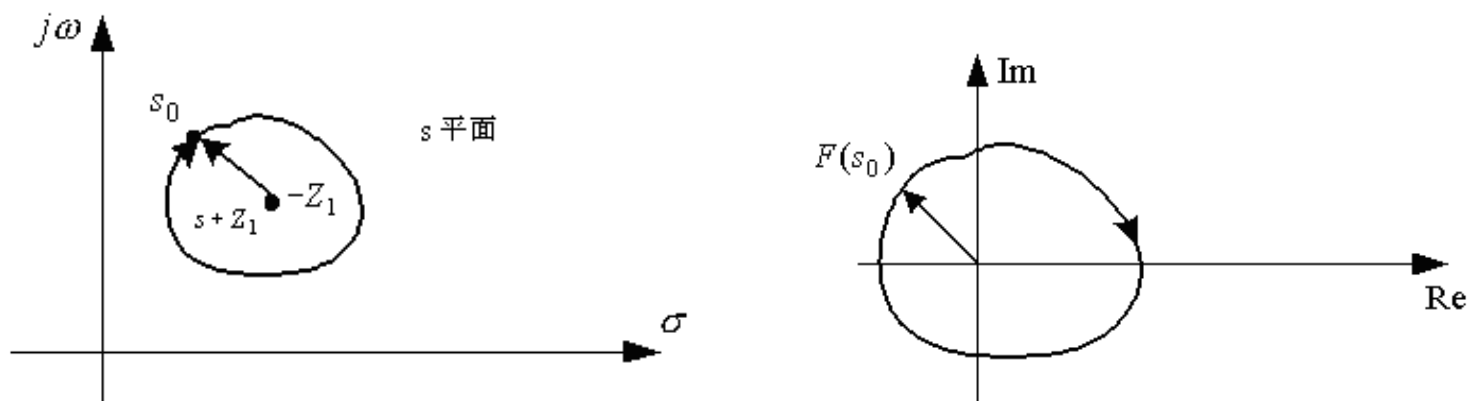
闭环稳定 \Rightarrow 闭环极点在 s 左半平面

$\Rightarrow F(s)$ 零点在 s 左半平面

2. 辐角原理（映射定理）

$$\angle F(s) = \angle(s + z_1) + \angle(s + z_2) + \cdots + \angle(s + z_m) - \angle(s + p_1) - \angle(s + p_2) - \cdots - \angle(s + p_n)$$





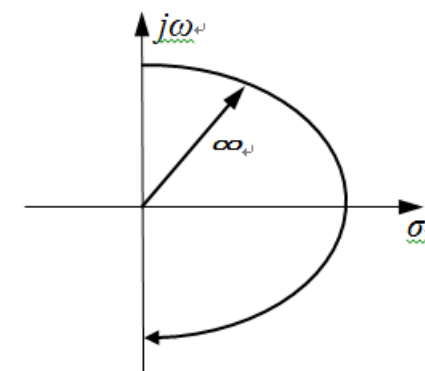
s 平面：顺时针包围 $F(s)$ 的 z 个零点 \rightarrow F 平面： $F(s)$ 顺时针绕原点 z 圈
 $(-2\pi)z$ 角增量

s 平面：顺时针包围 $F(s)$ 的 p 个极点 \rightarrow F 平面： $F(s)$ 逆时针绕原点 p 圈
 $-(-2\pi)p$ 角增量

s 平面：顺时针包围 $F(s)$ 的 p 个极点及 z 个零点 \rightarrow F 平面： $F(s)$ 绕原点
 逆时针转 $N = (p - z)$ 圈 (*)

3. 映射定理在分析闭环稳定性中的应用

奈奎斯特围线：令 s 平面上的封闭曲线包围全部右半 s 平面，曲线由整个 $j\omega$
 轴（从 $\omega = -\infty$ 到 $\omega = +\infty$ ）和右半 s 平面上半径为无穷大的顺时针半圆轨迹构成。



——包含了 $F(s)$ 的全部具有正实部的零极点。

若 $F(s)$ 在此无零点，则此处亦无闭环极点，系统闭环稳定。

如何知 $F(s)$ 在此无零点?

可由 $N = (p - z)$, $z = 0$ ($F(s)$ 的零点) $\Rightarrow N = p$ ($F(s)$ 的极点, 即开环极点) 知道, 即可根据 $F(s)$ 逆时针绕原点的圈数, 反推出闭环极点 < 0 个数。

$$\begin{cases} s \text{ 沿 } j\omega \text{ 轴变化} & \Rightarrow F(s) \rightarrow F(j\omega) \\ s \text{ 沿无穷大半圆变化} & \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = K, m = n, \text{位于 } F \text{ 平面实轴} \\ & \quad (\text{分母阶数大}) = 0, m < n, \text{位于 } F \text{ 平面原点} \end{cases}$$

\Rightarrow 考虑 $F(s)$ 是否包围 F 平面上的原点

\Leftrightarrow 考虑 s 平面的 $j\omega$ 轴, 即变点从 $-j\infty \rightarrow +j\infty$ 运动的情形

而 $F(s) = 1 + G(s)H(s) \xrightarrow{\omega \rightarrow -\infty \sim +\infty} 1 + G(j\omega)H(j\omega)$ 绕原点

$\rightarrow G(j\omega)H(j\omega)$ 绕 $(-1 + j0)$ 点的次数 N (逆时针) (**)

***: $N = (p - z) \rightarrow z = p - N$



4. 奈奎斯特稳定判据

若开环传函 $G(s)H(s)$ 在 s 的右半平面有 p 个极点, 则为了使闭环系统稳定, 当 ω 从 $-\infty \sim +\infty$ 变化时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 的轨迹必反时针包围 GH 平面上的 $(-1+j0)$ 点 $N = p$ 次。

即 $z = p - N = 0$

而 z —闭环传递函数在 s 右半平面的极点数。($F(s)$ 的零点)

p —开环传函在 s 右半平面的极点数。

N — $G(j\omega)H(j\omega)$ 绕 $(-1+j0)$ 点逆时针转的次数。

(若 N 为顺时针转时, 则应为 $z = p + N$)

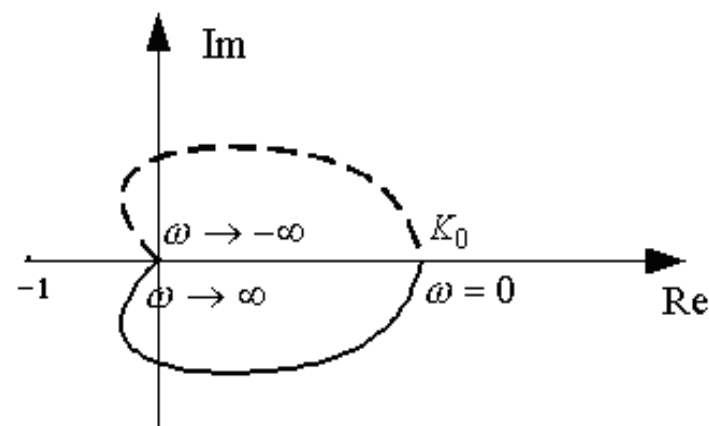
例. 判别 0 型系统 $G(s)H(s) = \frac{K_0}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ 的稳定性。

解: $n-m=2$, $N=0$; 可画出开环系统的极坐标图

$p=0$, $N=0 \rightarrow Z=0$; $p=0$ 即闭环传函在 s 右半平

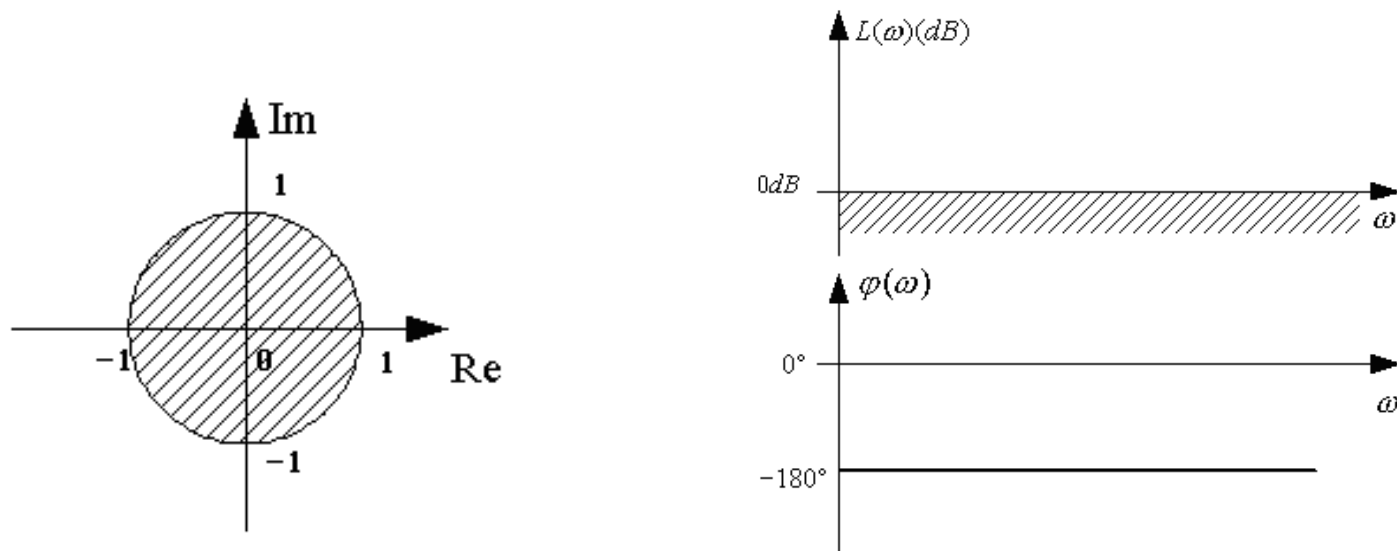
面无极点

\therefore 系统稳定



二. 对数判据

1. 极坐标与对数坐标图的对应关系



极坐标图单位圆 $|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$ —— 对数幅频图的 0dB 线；

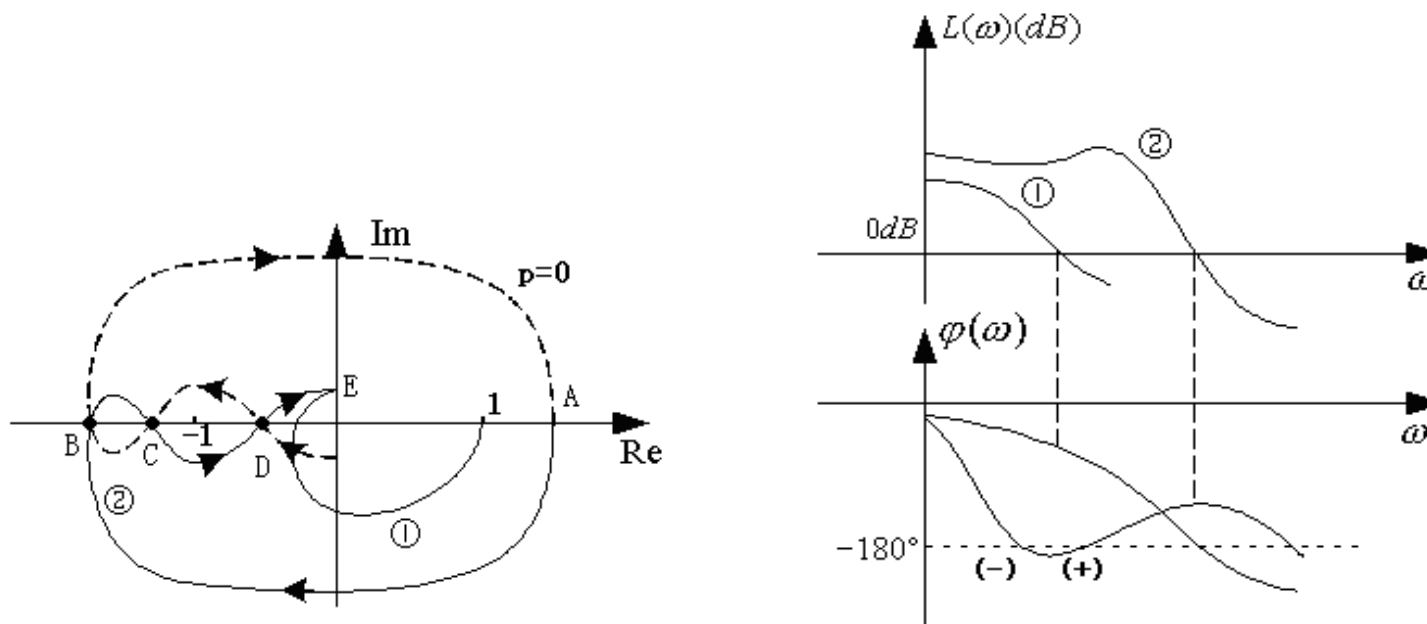
极坐标图负实轴 $|G(j\omega)H(j\omega)| = a$ —— 对数相频图的 -180° 线；

极坐标图单位圆外区域 —— 对数幅频图的 0dB 以上区域；

极坐标图单位圆内区域 —— 对数幅频图的 0dB 以下区域；

极坐标图上 $(-1 + j0)$ 点 —— 对数 $L(\omega) = 0dB, \varphi(\omega) = -180^\circ$ 。





AB: $\angle GH - +(-180^\circ)$; CD: $\angle GH - +(-180^\circ)$; BC: $\angle GH - +(0^\circ)$; DE: $\angle GH - +(0^\circ)$

如图示①②系统开环 $p=0$ ，其极坐标图及对数坐标图如上。

根据奈氏判据及极坐标图，知①②系统稳定， $G(j\omega)$ 不包括 $(-1, j0)$ 点 $\Leftrightarrow G(j\omega)$ 不穿越 -1 点以左的区段（如①）；或： $G(j\omega)$ 在 -1 点以左的正穿越次数 = 负穿越次数（如②）

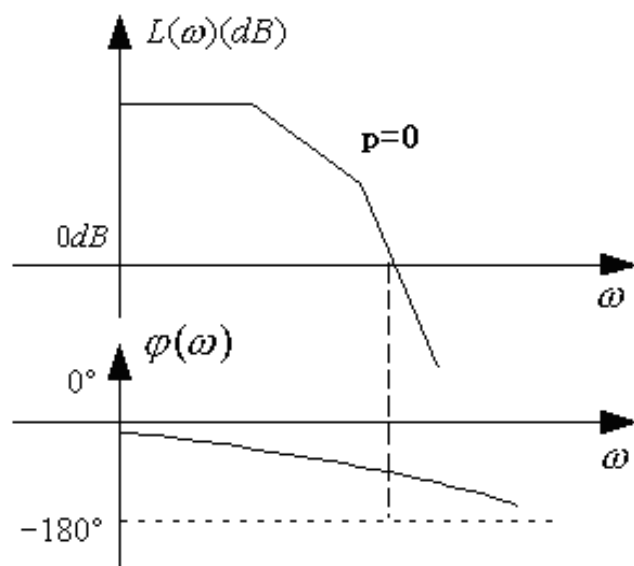
若用 $G(j\omega)$ 的幅相关系表述，则为：在 $|G(j\omega)| > 1$ 的范围内， $\angle G(j\omega)$ 对 -180° 线的正穿越次数 = 负穿越次数



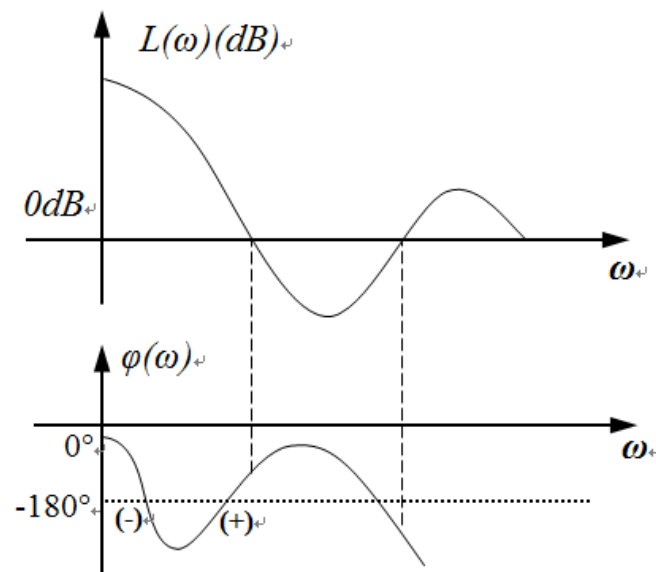
2. 对数判据

若开环系统稳定 ($p=0$)，则闭环系统稳定的充要条件是：在 $L(\omega) > 0\text{dB}$ 的所有频段内， $\varphi(\omega)$ 正负穿越 -180° 线的次数差为 0。 ($R=p/2$, p 为奇数时，半次穿越)

例. 若开环系统的对数坐标图分别如下图所示，判其稳定性。



$N=0 \therefore$ 稳定



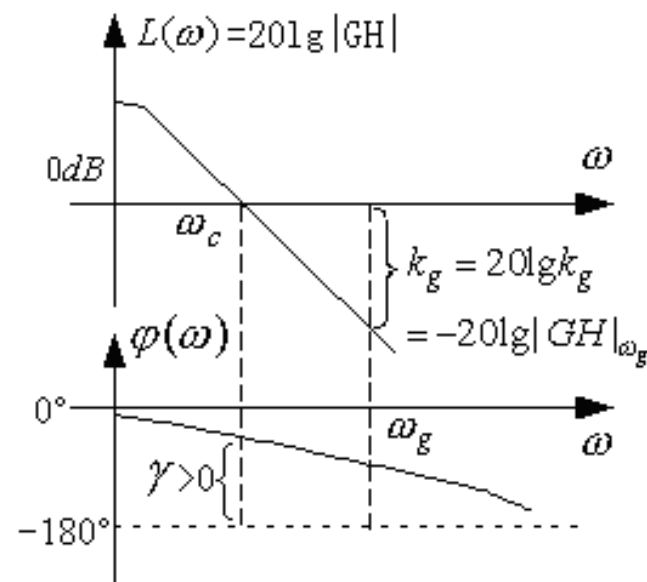
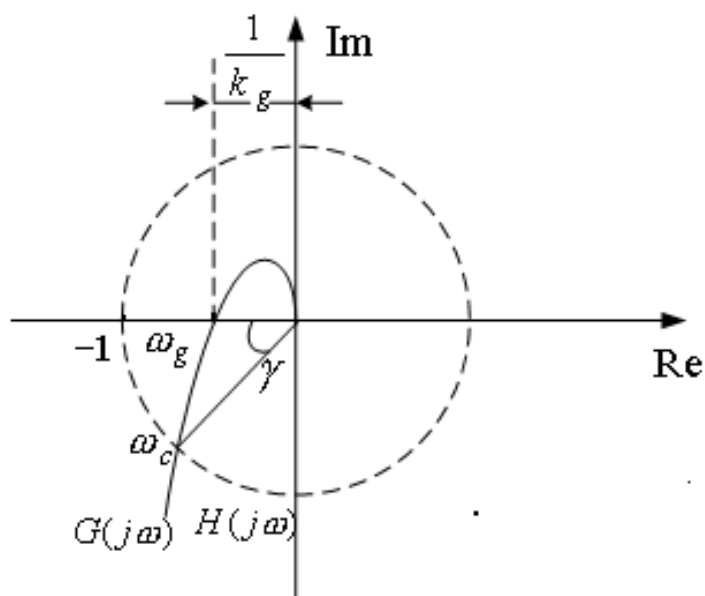
$N=1-1=0 \therefore$ 稳定

三. 稳定裕度

——衡量闭环系统稳定程度的指标。



可用 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线接近-1 点的程度来表征。



相位裕度 γ ：极坐标图 $|G(j\omega)H(j\omega)|=1$ 的矢量与负实轴的夹角；对数坐标图上 $20\lg|GH|=0$ 处 $\varphi(\omega)$ 与 $-\pi$ 的差； $\gamma > 0$ 系统稳定（对最小相位系统）

增益裕度 k_g ： $\frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$ ；对数图上 $\varphi(\omega)=-180^\circ$ 时的 $-L(\omega_g)$

$K_g(dB) > 0$ 系统稳定（对最小相位系统）； $\gamma = 180^\circ + \angle(G(j\omega_c)H(j\omega_c))$



§ 5.5 闭环系统频率特性

一. 闭环频率特性及性能指标

若单位反馈系统的闭环传递函数为 $T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ ；则 $T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$

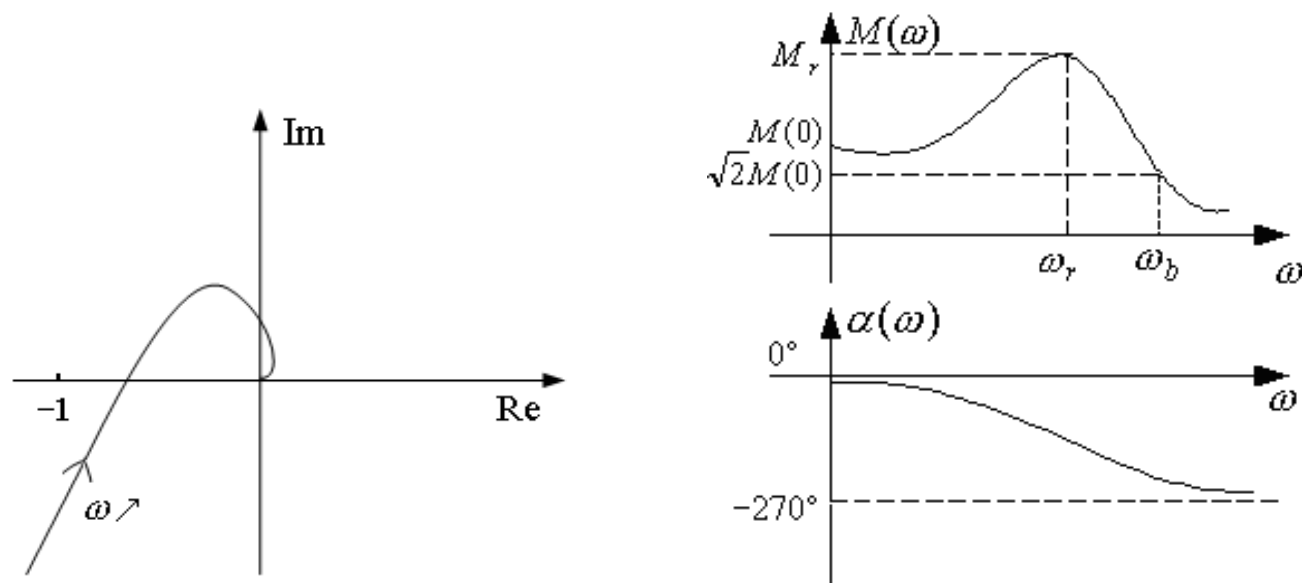
若 $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$,

$$\text{则 } G(j\omega) = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)} = \frac{A(\omega)e^{j\phi(\omega)}}{1+A(\omega)e^{j\phi(\omega)}} \quad (*)$$

①极坐标图

②对数坐标图





1. M_r 较高

→ 时域阻尼小, M_p 大, 收敛慢, 平稳及快速性差。

若 $M_r \rightarrow \infty$, 则闭环特征式 $\rightarrow 0 \Rightarrow$ 有 $\pm j\omega_r$ 的特征根 \Rightarrow 临界稳定, $t_s \rightarrow \infty$

2. B_ω 较大

系统惯性小, 快速性好。

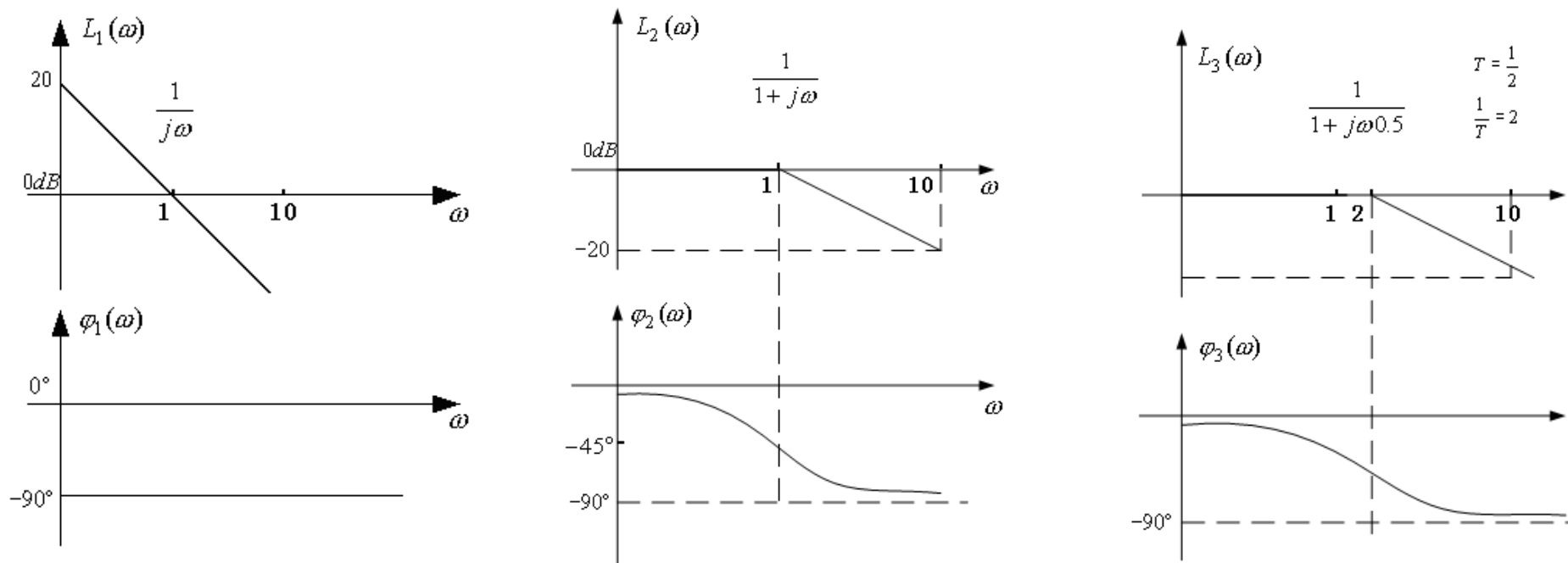
若 $\omega_b \rightarrow \infty$, 则系统相当于放大环节。 $c(t) = k \cdot r(t)$, $t_s = 0$ 。

- 一般准则: 频带宽, 峰值小 \rightarrow 过渡性能好。



例. 已知单位反馈系统的开环传函 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$ ，分析其稳定性及频域性能。

解：①画开环系统频响的伯德图并判稳定性



→开环系统伯德图

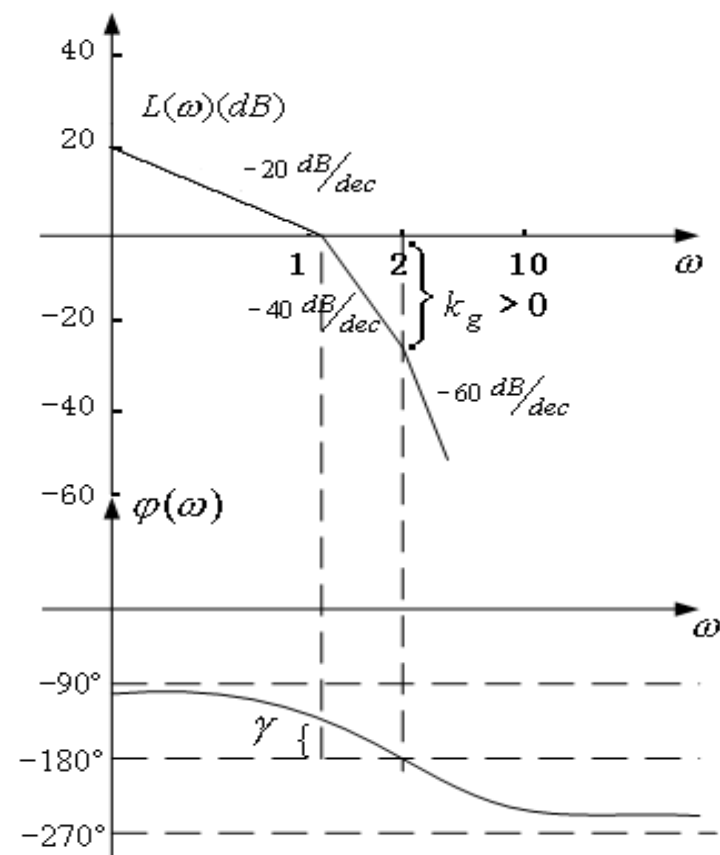
$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega); \quad \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega)$$

从中可见 $\gamma > 0$, $k_g > 0$ \therefore 闭环稳定



②画闭环频率特性曲线并分析性能

由伯德图查得：



ω	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.6	1.8
$L(\omega)$	14	7	3	-1	-4	-7	-9	-13
$\varphi(\omega)$	-105°	-125°	-135°	-150°	-162°	-173°	-180°	-190°

由尼柯尔斯图/或计算得：



$$M(\omega) \quad 0.25 \quad 1.2 \quad 3 \quad 5 \quad 3 \quad -2 \quad -6 \quad -11$$

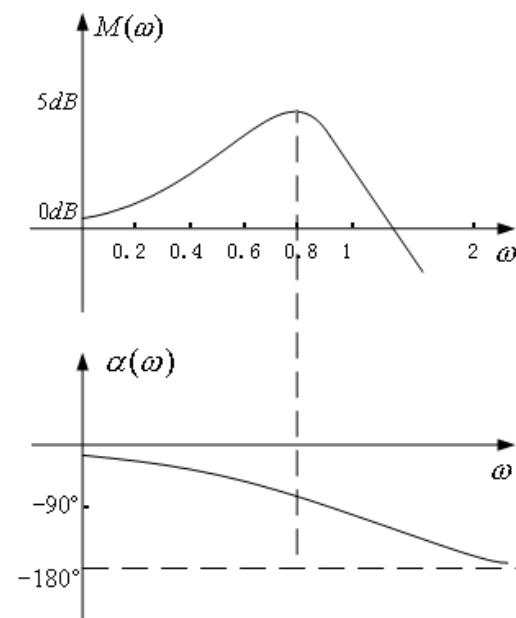
$$\varphi(\omega) \quad -14^\circ \quad -26^\circ \quad -45^\circ \quad -88^\circ \quad -140^\circ \quad -165^\circ \quad -180^\circ \quad -195^\circ$$

→ 闭环频率特性曲线 →

可查出

$$M_r = 5\text{dB}$$

$$\omega_b = 1.3\text{rad/s}$$



二. 从开环频率特性研究闭环系统的动态性能

1. 最小相位系统

观察各类稳定的典型环节，其伯德图有如下共同特征：

① 若在某一相当宽的频率段内， $L(\omega)$ 的斜率 ≈ 0 ，则 $\varphi(\omega) \approx 0$ 。

② 若在某一相当宽的频率段内， $L(\omega) \approx -20\text{dB/dec}$ ，则 $\varphi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$ 。

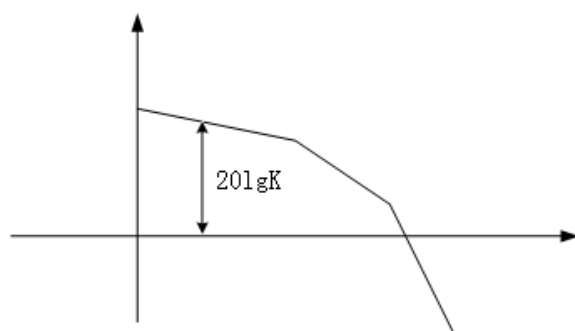


这种情况绝非偶然，数学上可以证明：右半平面上既无零点并无极点的传递函数，其幅频特性与相频特性不是互相独立的，二者之间存在着严格确定的联系。若给了 $L(\omega)$ ，就可算 $\varphi(\omega)$ ($\rightarrow(5-43)$)。具有这种传函的系统称为**最小相位系统**。

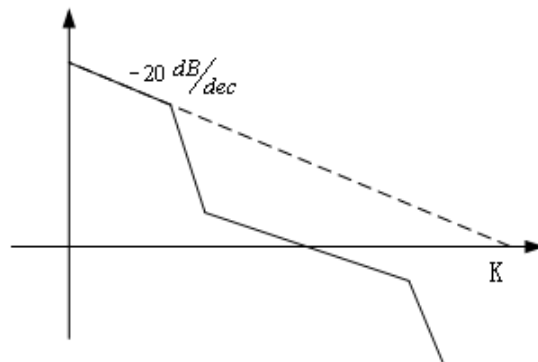
最小相位系统这一名称来源于通信科学，其含义是：若有几个传递函数的 $L(\omega)$ 完全相同，那么其中在 s 右半平面无零极点的那个函数，其相频特性函数的绝对值为最小。

工程上并不使用(5-43)式来实际计算 $\varphi(\omega)$ ，但可利用这一性质，直接从最小相位系统的 $L(\omega)$ 判断稳定性及动态性能，这样就可省去绘制准确的相频特性曲线的工作。

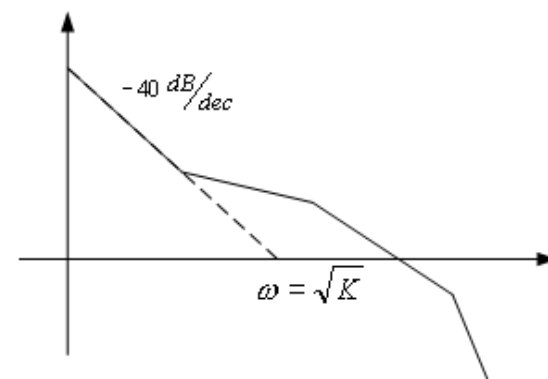
2. 开环频率特性的低频段决定稳态性能



O 型



I 型

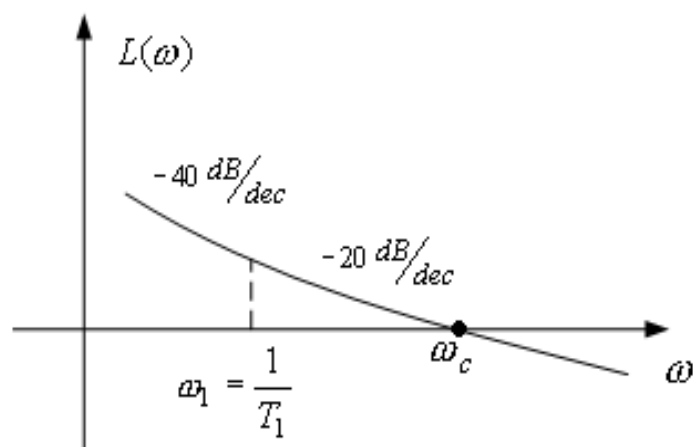


II 型

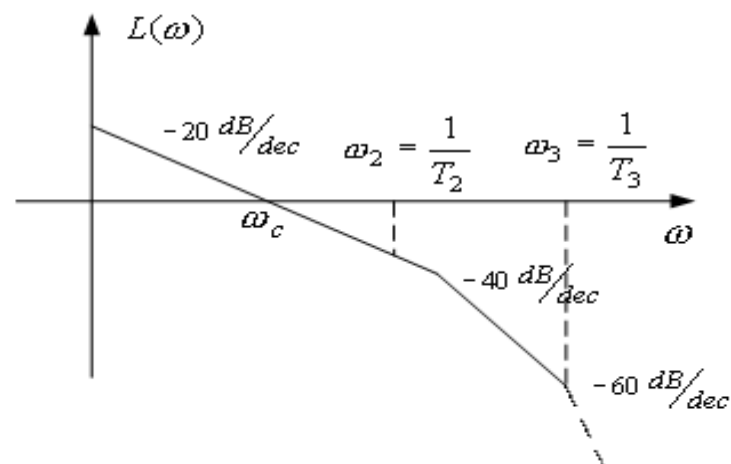


单位阶跃	$e_{ss} = \frac{1}{K+1}$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$
单位斜坡	∞	$\frac{1}{K}$	0
单位加速度	∞	∞	$\frac{1}{K}$

3. 开环频率特性的中频段决定稳定性



(a) II 型



(b) I 型



$$(a) \quad G(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_1)}{(j\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega_c) = -180^\circ + \arctg \omega_c T_1 = -180^\circ + \arctg\left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right); \quad \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = \arctg\left(\frac{\omega_c}{\omega_1}\right)$$

$$(b) \quad G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T_2)}$$

$$\varphi(\omega_c) = -90^\circ - \arctg \omega_c T_2 = -90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right); \quad \gamma = 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right) = \arctg\left(\frac{\omega_2}{\omega_c}\right)$$

$\frac{\omega_c}{\omega_1}$ 或 $\frac{\omega_2}{\omega_c}$	1	2	3	4	5	10	∞
$\gamma(^{\circ})$	45°	63.4°	71.6°	77°	78.7°	84.3°	90°

表明： γ 与 ω_1 至 ω_c 之间、 ω_2 至 ω_c 之间的距离有关。

(a) 只要 $\omega_1 < \omega_c$, γ 不会小于 45° , $L(\omega)$ 以 -20dB/dec 穿过 0dB 线; 若 $\omega_1 > \omega_c$, 则系统以 -40dB/dec 穿过 0dB 线, $\gamma < 45^\circ$, ω_1 越大, γ 越小。 $\omega_1 = 10\omega_c$ 时, $\gamma = 5.7^\circ$, 临界稳定。



(b) 只要 $\omega_2 \geq \omega_c$, γ 不会小于 45° , $L(\omega)$ 以 -20dB/dec 穿过 0dB 线; 若 $\omega_2 < \omega_c$, 则系统以 -40dB/dec 穿过 0dB 线, $\gamma < 45^\circ$, ω_2 越小, γ 越小。 $\omega_1 = 0.1\omega_c$ 时, $\gamma = 5.7^\circ$, 临界稳定。

● 结论: 只要 $L(\omega)$ 以 -20dB/dec 穿过 0dB 线, 二阶系统至少有 45° 的 γ 。 ω_1 或 ω_2 离 ω_c 越远, γ 越大; 当 $L(\omega)$ 以 -20dB/dec 穿过 0dB 线, ω_1 或 ω_2 离 ω_c 越远, γ 越小

若(b)的高频段再附加 -60dB/dec 斜率的线段, 则 $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)}$

此时 $\varphi(\omega_c) = -90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right) - \arctg\left(\frac{\omega_c}{\omega_3}\right)$

$$\gamma = \arctg\left(\frac{\omega_c}{\omega_2}\right) - \arctg\left(\frac{\omega_c}{\omega_3}\right)$$

\Rightarrow 高频段多一个惯性环节使 $\gamma \downarrow$ 。

当 $L(\omega)$ 以 -40dB/dec 穿过 0dB 线时, 由于小时常 T_3 的存在可能导致系统不稳定。



●结论： $L(\omega)$ 以 -20dB/dec 穿过 0dB 能满足稳定性要求，中频段长度越长， γ 越大。（此时对应 $\varphi(\omega_c) = -90^\circ$ ，离 -180° 有距离。）

中频段： ω_c 附近 $L(\omega)$ 斜率 $= -20\text{dB/dec}$ 的那一段。

简单系统：

$$G(s) = \frac{1}{Ts}; \quad T(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

$$L(\omega) \text{ 在 } \omega_c = \frac{1}{T} \text{ 过 } 0\text{dB}, \quad L(\omega_c) = 0\text{dB}$$

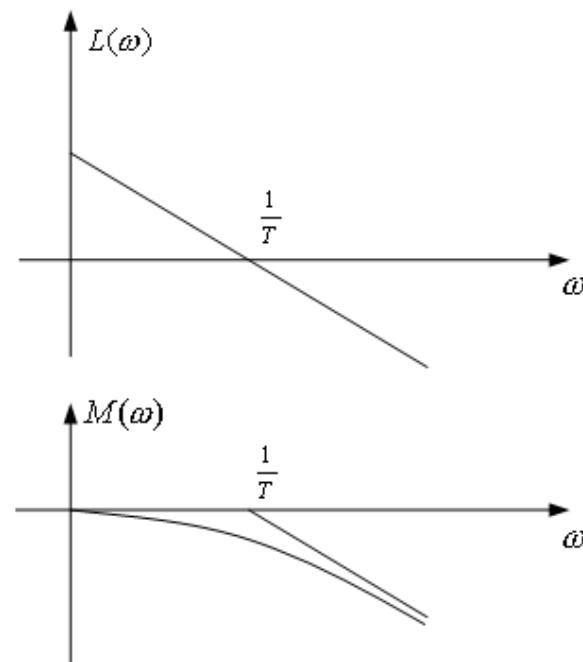
$$M(\omega_c) = -3\text{dB}$$

$\therefore \omega_c$ 即为截止频率

对复杂系统， ω_c 近似为截止频率。

4. 高频段决定对高频干扰的抑制

高频段， $|G(j\omega)H(j\omega)| \ll 1$



$$T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \approx G(j\omega) \text{——可从开环传递函数研究闭环频率特性}$$

希望 $T(j\omega) \approx 1$ 从 $\omega \in (0, \infty)$ ，此时闭环系统尽可能准确地复现输入信号。

——希望 $G(j\omega)$ 保持高增益地频率范围宽一些。但太宽干扰进来了。

§ 5.6 校正方法

一、校正的概念

定义：给系统附加一些具有某种典型环节特性的元件，有效地改善整个系统的控制性能，达到指标的要求，即为校正。

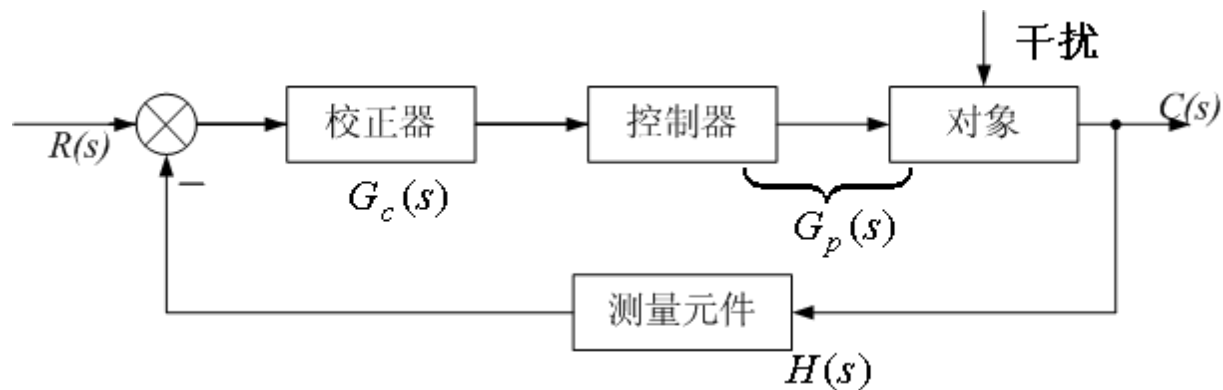
——这一附加的部分称为校正元件。

方法：利用根轨迹法、频率法用试探方式设计。

分类：

1. 串联校正





$G_c(s)$ 又分：

- 超前网络校正器
- 滞后网络校正器
- 滞后—超前网络校正器

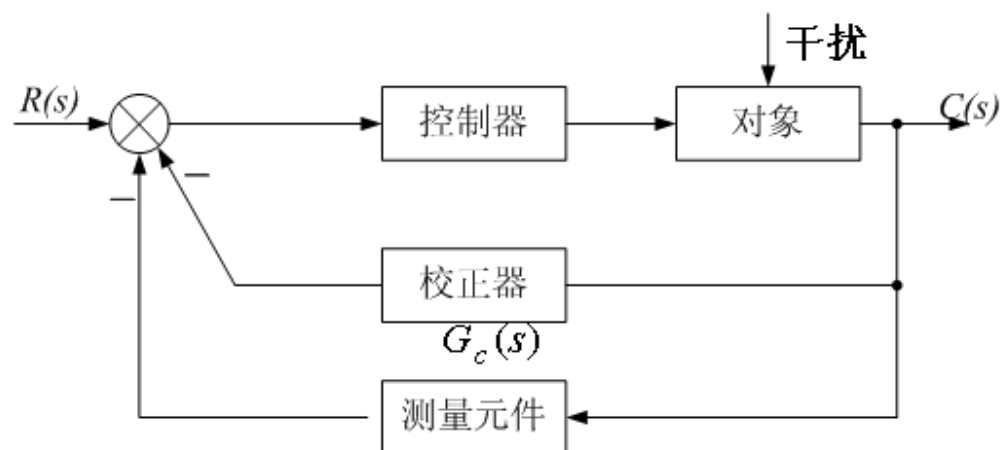
2. 并联校正（反馈校正）

$G_c(s)$ 又分：

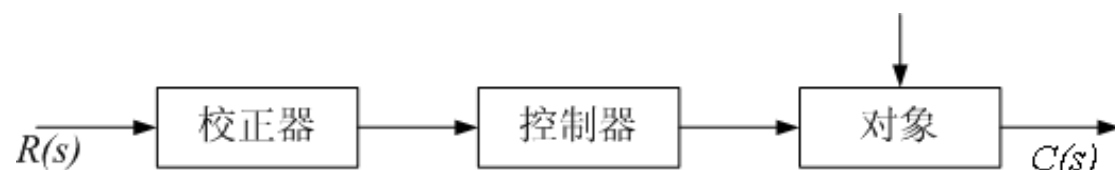
- 速度反馈
- 加速度反馈
- 比例反馈

软反馈

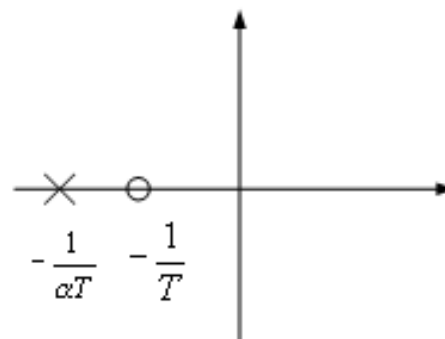
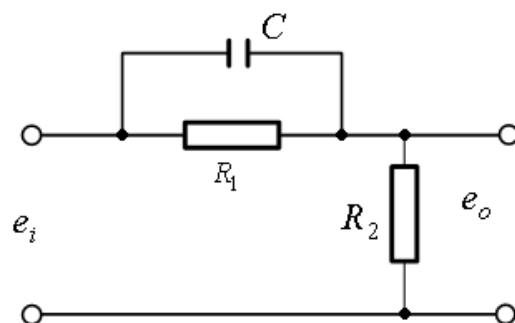
硬反馈



3.前馈校正



二、串联校正方法



RC 超前网络

- 超前校正——加开环零点可提供超前相位（使根轨迹向右弯曲）

(1) 超前校正器

作用是提供一个超前相位。



$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 CS + 1}{\frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 CS + 1}$$

$$\text{令 } T = R_1 C, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

$$\therefore G_c(s) = \alpha \cdot \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = \frac{s + 1/T}{s + 1/\alpha T}$$

• 极坐标图

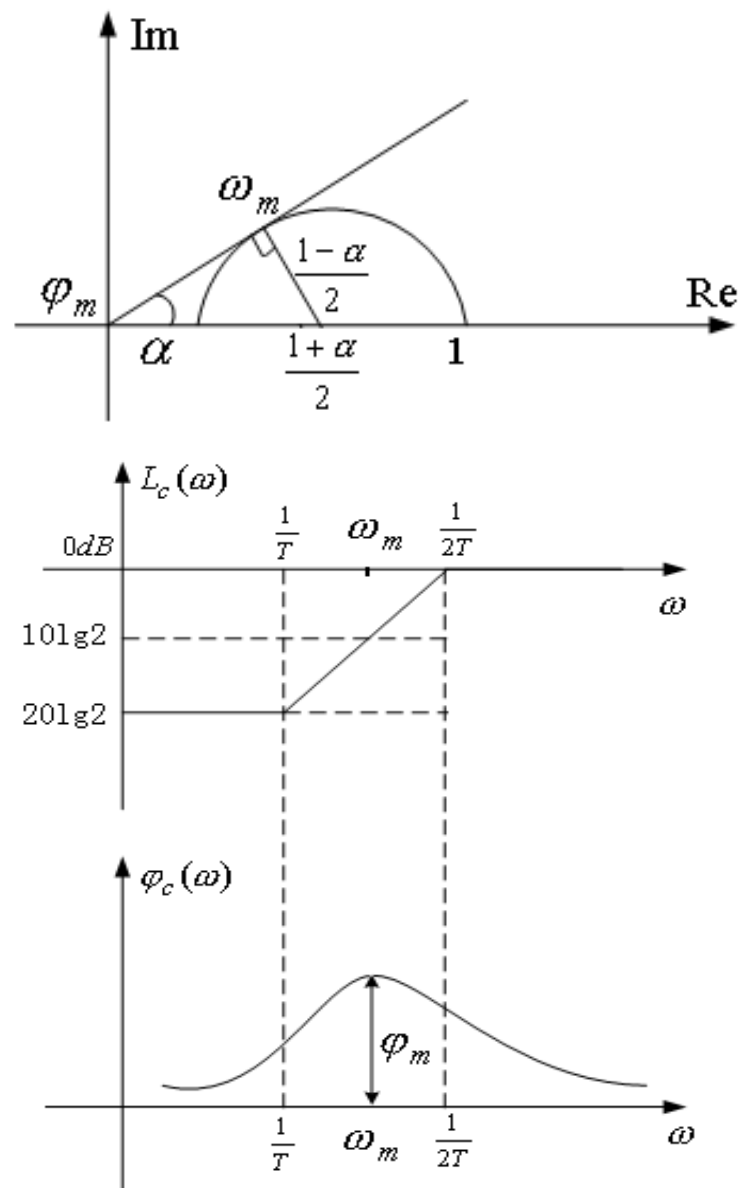
$$G_c(j\omega) = \frac{\alpha \cdot \sqrt{1 + \omega^2 T^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2 \alpha^2}} \cdot \angle(\text{tg}^{-1} \omega T - \text{tg}^{-1} \alpha \omega T)$$

$$G_c(j0) = \alpha, \quad G_c(j\omega) = 1$$

最大超前角发生在 $\omega = \omega_m$ 处

$$\therefore \sin \varphi_m = \frac{(1 - \alpha)/2}{(1 + \alpha)/2} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$$\therefore \varphi_m = \sin^{-1} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$



• 伯德图 —— 为高通滤波器

转角频率： $\omega_1 = \frac{1}{T}$, $\omega_2 = \frac{1}{\alpha T}$

φ_m 位于 $\varphi(\omega)$ 的几何中点

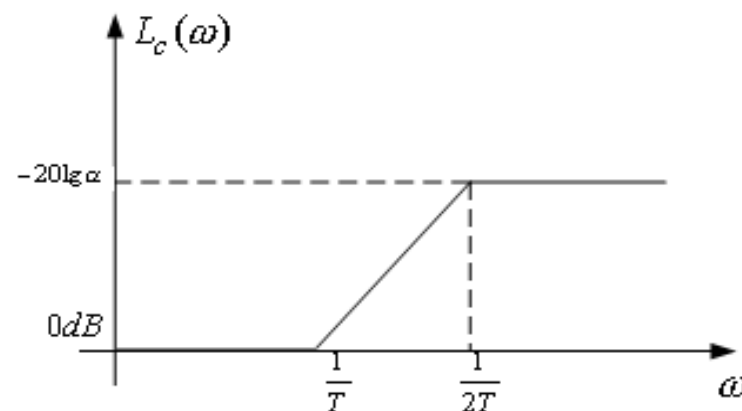
$$\omega \ll \frac{1}{T} \rightarrow \omega \ll \frac{1}{\alpha T}, \quad L_c(\omega) = 20\lg \alpha$$

$$\omega \gg \frac{1}{T} \rightarrow \omega \gg \frac{1}{\alpha T}, \quad L_c(\omega) = 0\text{dB}$$

\Rightarrow 串联一个 $K = \frac{1}{\alpha}$ 的放大器后 \rightarrow

$$\lg \omega_m = \frac{1}{2} \left(\lg \frac{1}{T} + \lg \frac{1}{\alpha T} \right) = \frac{1}{2} \lg \frac{1}{\alpha T^2},$$

$$\therefore \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}, \quad L(\omega_m) = 10\lg \alpha$$



(2) 超前校正

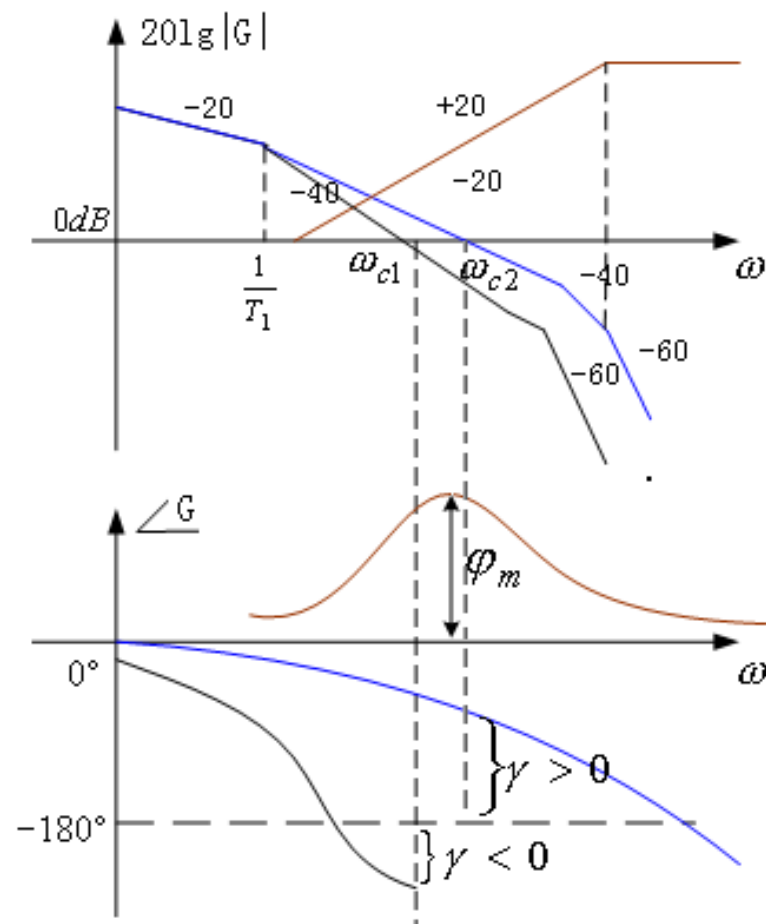
设单位反馈系统，原开环频率特性 $G_c(j\omega)$ 的对数坐标图如右：

$20\lg|G| > 0$ 时， $\gamma < 0$

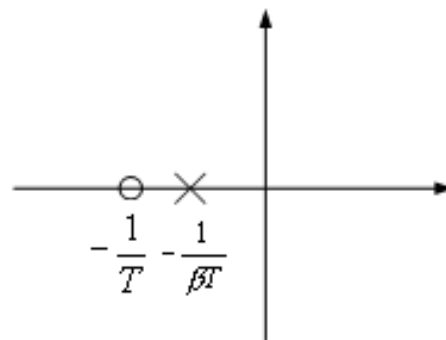
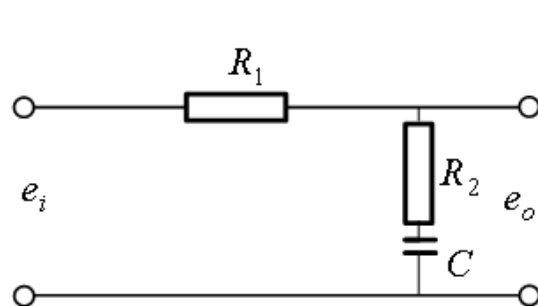
\therefore 不稳定，而加超前校正后稳定。

作用：

- 可在截止频率处产生超前相位，以增加 γ
- 增加频宽提高快速性
- 对提高 e_{ss} 作用很大。



2. 滞后校正



RC 滞后网络

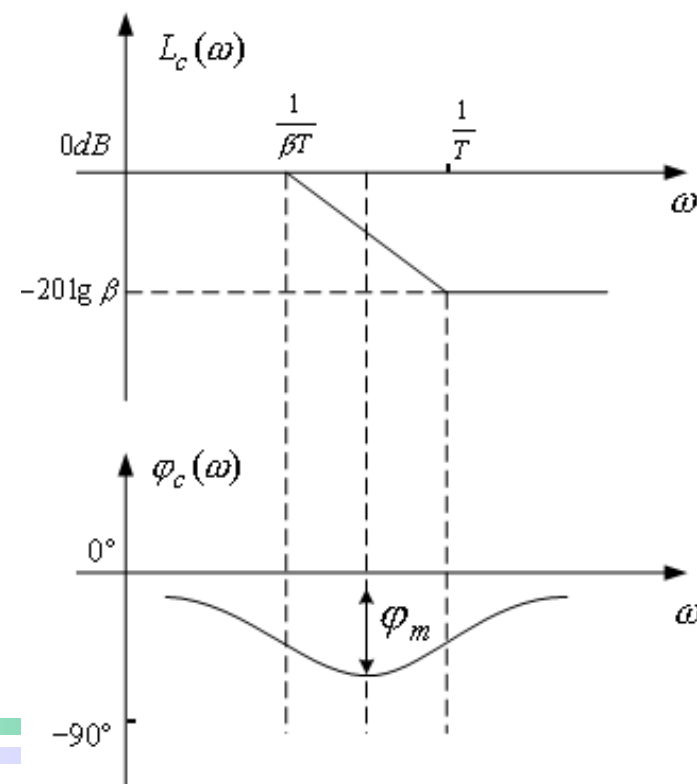
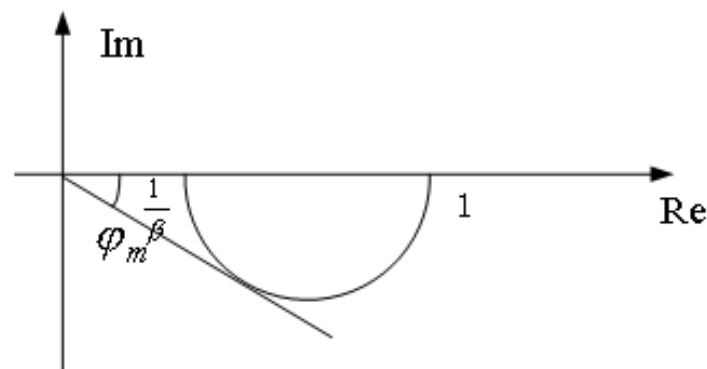
(1) 滞后校正器

$$G_c(s) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + 1/T}{s + 1/\beta T} = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

$$T = R_2 C,$$

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$$

- 极坐标图



$$\varphi_m = \sin^{-1} \frac{1-1/\beta}{1+1/\beta}$$

• 伯德图

为低通滤波器

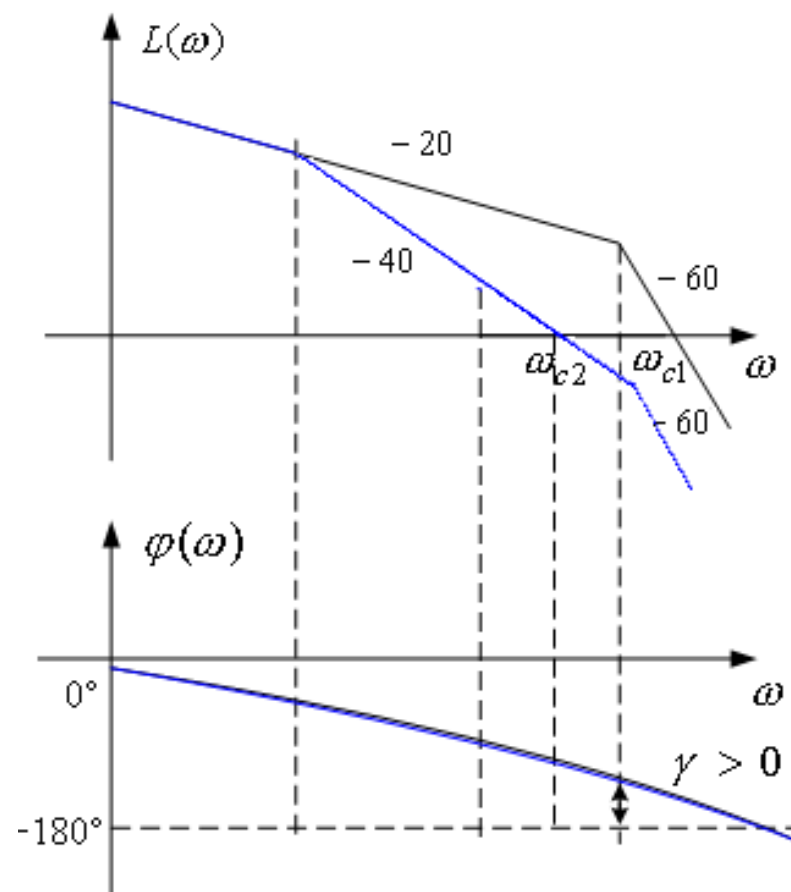
(2) 滞后校正

设单位反馈系统，原开环频率特性 $G_c(j\omega)$ 的 Bode 图如下：

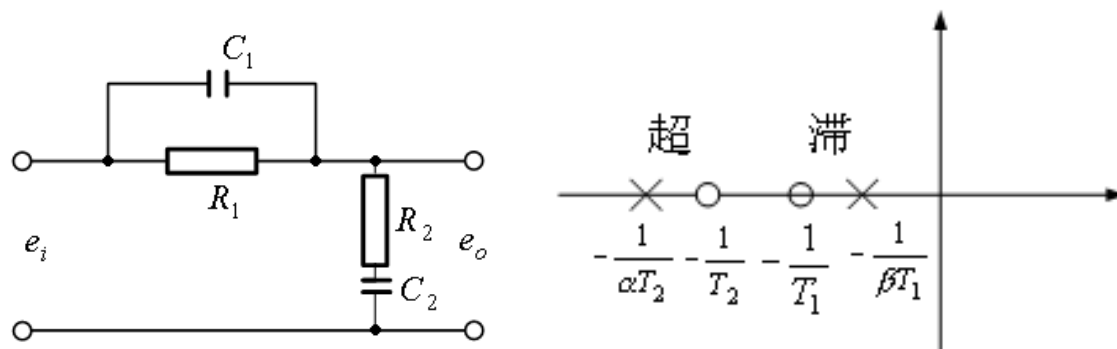
滞后校正后 $\omega_{c2} < \omega_{c1}$ ；减少了频宽

作用：

- 抑制高频但降低快速性
- 对稳定裕度无很大影响



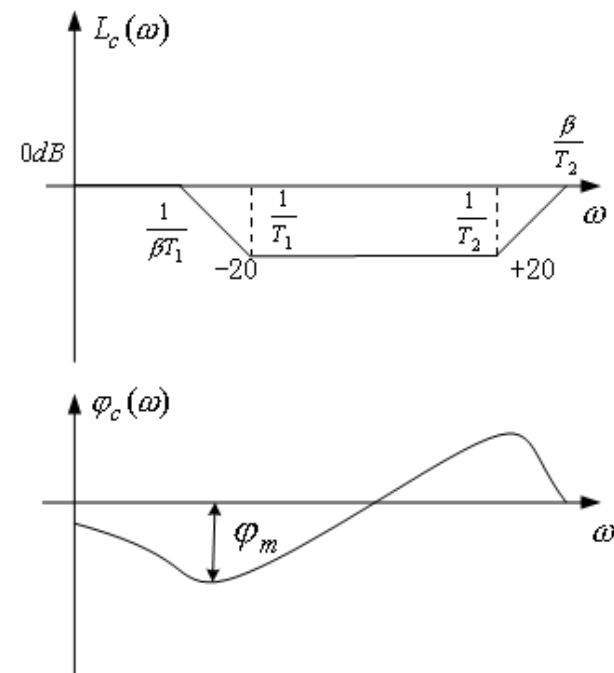
3. 滞后—超前校正



$$G_c(s) = \frac{(s + 1/T_1)(s + 1/T_2)}{(s + 1/\beta T_1)(s + 1/\alpha T_2)}$$

低频段：滞后校正

高频段：超前校正，为带通滤波器



三、P.I.D 控制

1. PD 校正器——比例微分校正器（极点位于 ∞ 点）

$$G_c(s) = K_d s + K_p$$



$$= K_p \left(\frac{K_d}{K_p s} + 1 \right)$$

$$G_c(j\omega) = K_p(j\omega T + 1)$$

$$\varphi_c(\omega) > 0$$

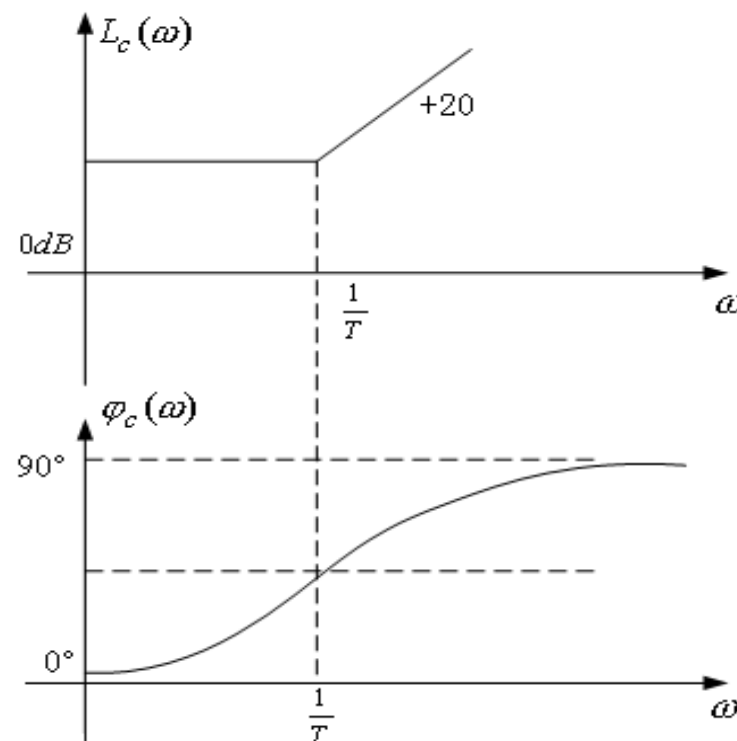
——一种超前校正

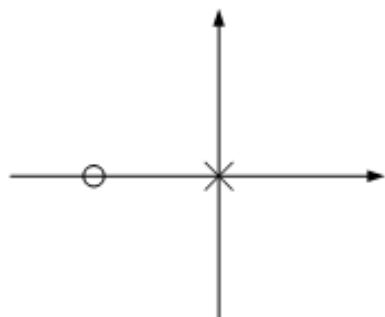
2. PI 校正器——比例积分

$$G_c(s) = K_p + \frac{1}{T_i s} = \frac{T_i K_p s + 1}{T_i s}$$

（极点位于原点）

$\varphi_c(\omega) < 0$ ——一种滞后校正





3. P.I.D 校正器

$$G_c(s) = K_p + K_d s + \frac{1}{T_i s}$$

为滞后超前校正器

四、改进二阶系统性能的措施分析

二阶系统超调大，振荡— ξ 小，稳定裕度小

加上 PD 超前校正后，以 -20dB 穿越 0dB ，稳定裕度大。

→ $\xi \uparrow$ 。同时 B_w 大，系统惯性小，快速性好。

