

第四章 根轨迹法

- 知闭环极点 $\begin{cases} \rightarrow \text{可判闭环系统的稳定性（已解决）。} \\ \rightarrow \text{可求瞬态响应，检查瞬态指标。} \end{cases}$
- 阿贝尔定理（5 次以上的代数方程没有一般的代数解法——即由方程的系数经有限次四则运算和开方运算求根的方法）指出：代数方程 $n \geq 4$ 时，求根困难，且系统参数变化时，要进行大量的反复计算。
- Evans 1948 提出由开环传递函数求闭环极点的图解方法——根轨迹法。
- 第二章假定——闭环极点可求；本章解决此假设问题——不用代数方法！

§ 4—1 根轨迹与根轨迹方程

一、根轨迹

一般根轨迹是指当开环增益 K 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，闭环极点在 S 平面上移动的轨迹。



例：已知下图所示系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)} = \frac{2K}{s(s+2)}$ 。分析其根轨迹与系统性能之间的关系。

解：有 $G(s)$ 的开环极点：0、-2，闭环传递函数

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K},$$

闭环特征方程： $s^2 + 2s + 2K = 0$,

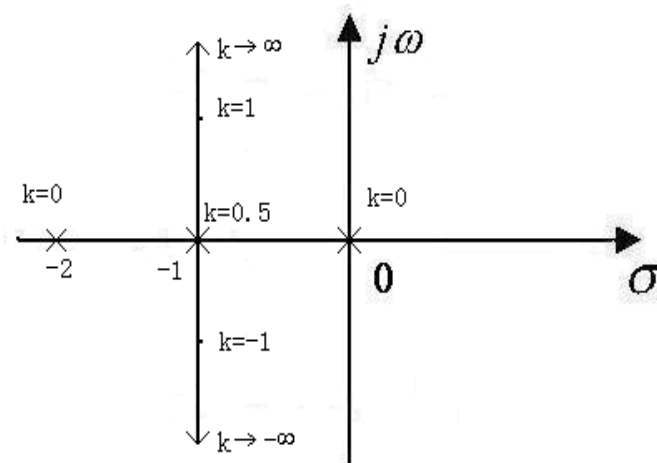
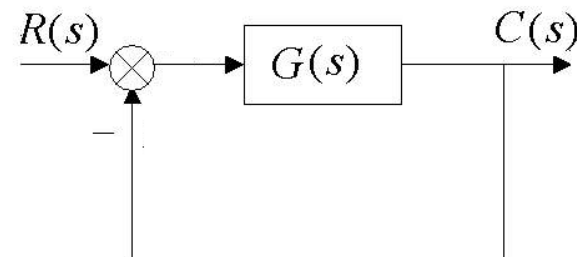
∴ 闭环极点为： $s_1 = -1 + \sqrt{1-2K}$, $s_2 = -1 - \sqrt{1-2K}$ 。

当 $K=0$ 时， $s_1 = 0, s_2 = -2$;

$K=0.5$ 时， $s_1 = -1, s_2 = -1$;

$K=1$ 时， $s_1 = -1 + j, s_2 = -1 - j$;

$K=\infty$ 时， $s_1 = -1 + j\infty, s_2 = -1 - j\infty$;



由根轨迹分析系统动态性能:

- ①当 K 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 根轨迹总在 s 左半平面 \Rightarrow 系统对所有的 K 都稳定。
- ②当 $0 < K < 0.5$ 时, 闭环极点为实数, 系统呈过阻尼状态, 阶跃响应为非周期过程。
- ③当 $K = 0.5$ 时, 两闭环极点相等, 系统临界阻尼。
- ④当 $K > 0.5$ 时, 两闭环极点为共轭复根, 系统呈欠阻尼状态, 阶跃响应为阻尼振荡过程。
- ⑤ \because 开环传递函数有一个位于坐标原点的极点。

\therefore 为 I 型系统。

\rightarrow 阶跃作用下, $e_{ss} = 0$ 。

结论:

- ①根轨迹可分析系统中参数 (具有物理意义的参数, 如 K 。而二阶系统中的 ξ 、 ω_n 反映了系统的本质, 却不可实测) 变化时闭环极点的位置。
- ②以上解析法不适于高阶系统。
- ③根轨迹法思路: 根据反馈系统中开、闭环传递函数之间的确定关系, 由开环传递函数直接寻找闭环极点。



二、闭环极点与开环零极点的关系

闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

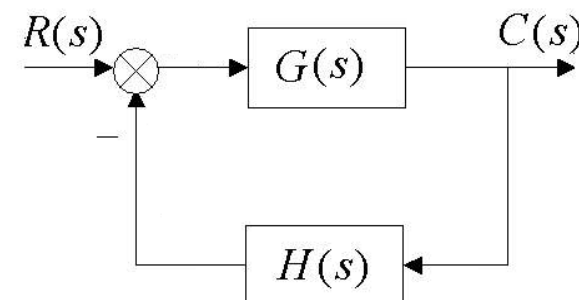
一般地，可设：

$$G(s) = \frac{K_G^* \prod_{i=1}^{m_g} (s - z_{gi})}{\prod_{i=1}^{n_g} (s - p_{gi})} \quad \text{————— 前向通路传递函数}$$

$$H(s) = \frac{K_H^* \prod_{i=1}^{m_h} (s - z_{hi})}{\prod_{i=1}^{n_h} (s - p_{hi})} \quad \text{————— 反馈通路传递函数}$$

————— K_G^* 、 K_H^* 分别为前向、反馈通路的根轨迹增益。

开环传递函数：



$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{i=1}^{m_g} (s - z_{gi}) \prod_{i=1}^{m_h} (s - z_{hi})}{\prod_{i=1}^{n_g} (s - p_{gi}) \prod_{i=1}^{n_h} (s - p_{hi})}$$

————— $K^* = K_G^* \cdot K_H^*$ 为开环系统的根轨迹增益。

闭环传递函数：

$$T(s) = \frac{K_G^* \prod_{i=1}^{m_g} (s - z_{gi}) \prod_{i=1}^{n_h} (s - p_{hi})}{\prod_{i=1}^{n_g} (s - p_{gi}) \prod_{i=1}^{n_h} (s - p_{hi}) + K^* \prod_{i=1}^{m_g} (s - z_{gi}) \prod_{i=1}^{m_h} (s - z_{hi})}$$

结论：

① 闭环系统的根轨迹增益 $K_T^* = K_G^* \xrightarrow{H(s)=1} K^*$ 。

② 闭环零点 = $G(s)$ 的零点 + $H(s)$ 的极点。

当 $H(s)=1$ 时，闭环零点 = 开环零点 = $G(s)$ 的零点。

③ 闭环极点与开环零点、开环极点及根轨迹开环增益有关。



三、根轨迹方程

画根轨迹实质上是找闭环特征方程 $1 + G(s)H(s) = 0$ 的根。

\Rightarrow 满足 $G(s)H(s) = -1$ 的 s 值，必是根轨迹上的点。

设开环传递函数 $G(s)H(s)$ 有 m 个零点， n 个极点，则上式可写为：

$$\frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = 1 \quad \text{—— 模值方程} \\ \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi \quad \text{—— 相角方程} \end{array} \right.$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，相角为奇数个 π

结论：



- ①复平面上的 s 点若是闭环极点，则它与开环零点极点组成的向量必满足上述方程。
- ②**相角方程是决定闭环根轨迹的充要条件**，它可确定哪些点在或不在根轨迹上，模值方程主要用于确定根轨迹上的各点对应的开环增益 K^* 。

§ 4-2 绘制根轨迹的基本法则

一. 根轨迹的分支数

分支数 = 闭环极点数
= 闭环特征方程的阶数 n

二. 根轨迹对称于实轴

闭环极点为 $\begin{cases} \text{实数} \rightarrow \text{在实轴上} \\ \text{复数} \rightarrow \text{共轭} \rightarrow \text{对称于实轴} \end{cases}$

三. 根轨迹的起点与终点

起于开环极点，终于开环零点。



由根轨迹方程有：

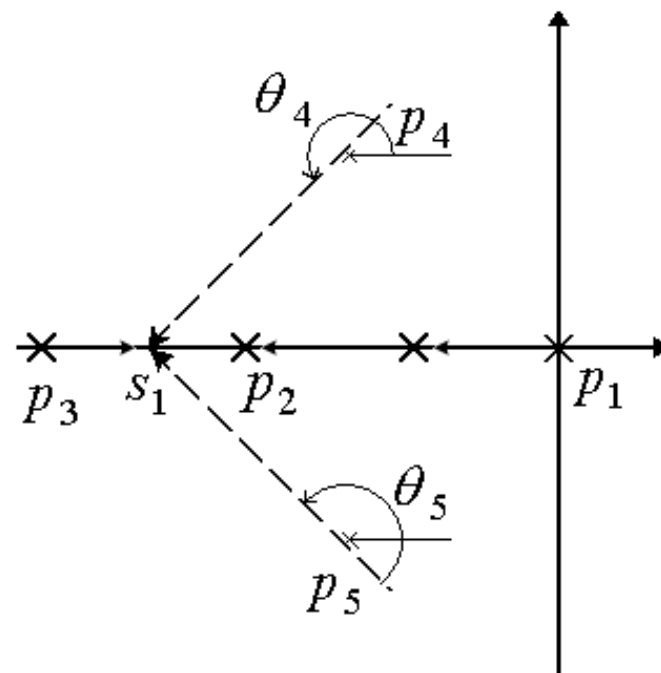
$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -\frac{1}{K^*}$$

起点： $K^* = 0 \rightarrow s - p_i = 0 \rightarrow s = p_i$ ； 终点： $K^* = \infty \rightarrow s - z_i = 0 \rightarrow s = z_i$

若开环零点数 $m <$ 开环极点数 n (有 $n - m$ 个开环零点在无穷远处)

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^m (s - p_i) \prod_{i=m+1}^n (s - p_i)} = \frac{1}{\infty}$$

则有 $(n - m)$ 条根轨迹终于无穷远点。



四. 实轴上的根轨迹

实轴上根轨迹区段的右侧，开环零、极点数目之和应为奇数。

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) \xrightarrow{m=1, n=5} (2k+1)\pi$$

$$\theta_3 = 0^\circ, \quad \theta_2 = \theta_1 = \theta_z = 180^\circ, \quad \theta_4 + \theta_5 = 2\pi$$

$$\theta_z - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5) = -3\pi = \pi - (2\pi + 0 + 2\pi)$$

共轭对幅角之和无贡献，左边幅角为0，右边为 π ，有奇数个 π 即可！

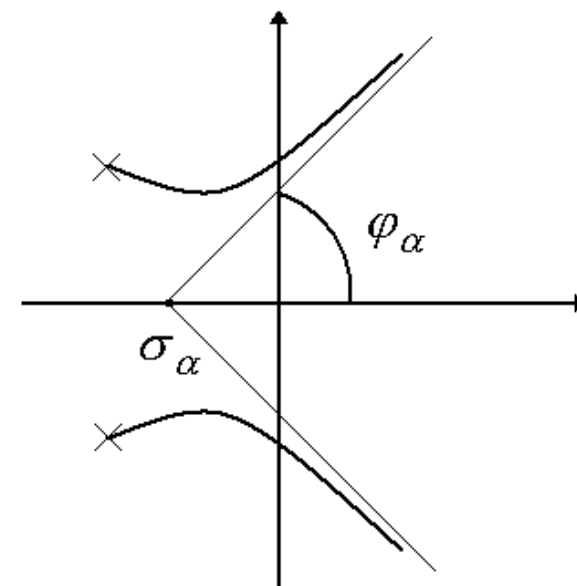
五. 根轨迹的渐近线

当 $s \rightarrow \infty$ 时， $G(s)H(s)$ 是什么样子？

若 $m < n$ ，则 $n - m$ 条根轨迹 $\rightarrow \infty$ 的方向可由渐近线决定。

$$\text{渐近线与实轴交点的坐标: } \sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

渐近线与实轴交点的夹角：



$$\varphi_a = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{至获得}(n-m) \text{个角。}$$

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K \cdot \frac{s^m - \sum_{i=1}^m z_i s^{m-1} + \dots + \prod_{i=1}^m (-z_i)}{s^n - \sum_{j=1}^n p_j s^{n-1} + \dots + \prod_{j=1}^n (-p_j)}$$

长除

$$= \frac{K}{s^{n-m} - \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{n-m-1} + \dots} \quad (\text{重极点亦成立})$$

$$G(s)H(s) = -1$$

$$\rightarrow s^{n-m} - \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{n-m-1} + \dots = -K = K \cdot e^{j(2k+1)\pi}$$

$$\rightarrow s^{n-m} \left[1 - \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{-1} + \dots \right] = K \cdot e^{j(2k+1)\pi}$$

$$s \rightarrow \infty \quad (\text{即渐近线}) \text{ 可忽略高次项, 取开方 } \frac{1}{n-m}$$



$$\rightarrow s \left[1 - \left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{-1} \right]^{\frac{1}{n-m}} = K^{\frac{1}{n-m}} \cdot e^{\frac{j(2k+1)\pi}{n-m}}$$

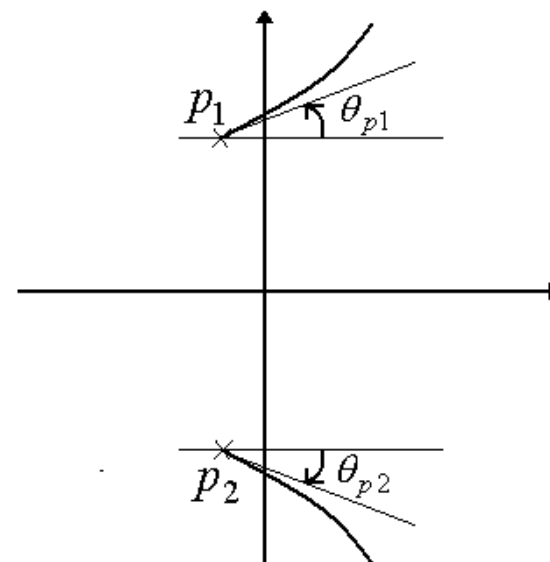
二项式定理：

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^r C_r^k a^{r-k} \cdot b^k$$

$$\approx C_r^0 a^r + C_r^1 a^{r-1} b$$

$$= a^r + r a^{r-1} b$$

$$\downarrow C_r^0 = 1, C_r^1 = \frac{r!}{(r-1)!1!} = r \text{ 为二项式系数}$$



$$s \left[1 - \frac{\left(\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) s^{-1}}{n-m} \right]$$

$$= s - \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = K \frac{1}{n-m} \cdot e^{\frac{j(2k+1)\pi}{n-m}}$$

$$s - \sigma_a = K \frac{1}{n-m} \cdot e^{j\varphi_a}$$

即为 $k \rightarrow \infty$ 远方的根轨迹方程，是个直线方程，表明从实轴上坐标为 $(\sigma_a, 0)$ 的点向远方根轨迹上的点 s 引矢量，则此矢量在远方就近似与根轨迹重合。

换言之， $(\sigma_a, 0)$ 就是这 $n-m$ 条渐近线在实轴上的共同点，即这些渐近线都从 $(\sigma_a, 0)$ 点向外辐射，而辐射角正是渐近线的方向角或渐近线的倾角。

六. 根轨迹的起始角与终止角

起始角：起于开环极点的根轨迹在起点处的切线与水平线正向的夹角。

终止角：终止于开环零点的根轨迹在终点处的切线与水平线正向的夹角。



$$\text{由 } \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi$$

$$s \rightarrow p_j, \quad \theta_{pj} = \lim_{s \rightarrow p_j} \angle(s - p_j), \quad \theta_{pj} = -(2k+1)\pi + \sum_{i=0}^m \angle(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \angle(p_j - p_i)$$

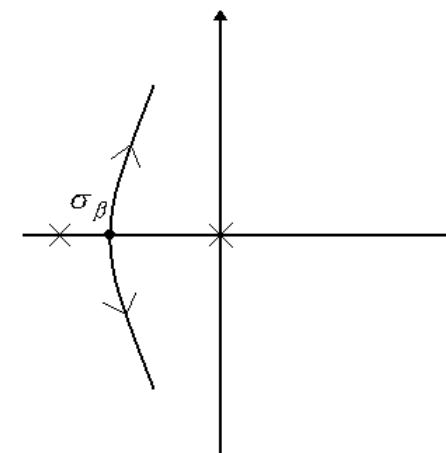
$$\theta_{zj} = +(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^n \angle(z_j - p_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \angle(z_j - z_i)$$

七. 分离点（或会合点的坐标）

几条（二条）根轨迹在 s 平面上相遇又分开的点。

若根轨迹位于实轴两相邻开环极点之间，则此二极点之间至少存在一个分离点。

若根轨迹位于实轴两相邻开环零点之间，则此二极点之间至少存在一个会合点。



(1) 辐角条件逼近点

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_B - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_B - p_j}$$



(2) 重根法

代数方程 $f(x) = 0$ 若在 $s = s_1$ 处有二重根，则

$$f(x) = (x - y_i)(x - s_1)^2$$

$$\rightarrow f(s_1) = 0, f'(s_1) = 0$$

$$\begin{cases} 1 + G(s)H(s) = 0 \\ \frac{d}{ds}[1 + G(s)H(s)] = \frac{d}{ds}[G(s)H(s)] = 0 \end{cases}$$

八. 根轨迹与虚轴的交点

1. 利用 Ruth 判据，求系统稳定的临界 K 值（第二种特殊情况），再根据临界 K 值求相应的 ω 值，即为虚轴上交点坐标 $j\omega$ 。
2. 求 $[1 + G(s)H(s)] \big|_{s=j\omega} = 0$ 的 ω 值。

九. 根之和与根之积

若 n 个根为 p_1, \dots, p_n （闭环极点），则

$$\sum_{j=1}^n p_j = -a_1, \quad \prod_{j=1}^n p_j = (-1)^n a_n$$



§ 4.3 控制系统的根轨迹分析

一. 用闭环零极点表示的阶跃响应解析式

由开环 $G(s)H(s)$

→ 闭环极点的根轨迹

—— $\xrightarrow{\text{对某 } K^*}$ 求闭环极点 —— $\xrightarrow{+ \text{零点}}$ 确定闭环传函

—— $\xrightarrow{+r(t)}$ 闭环系统动态性能

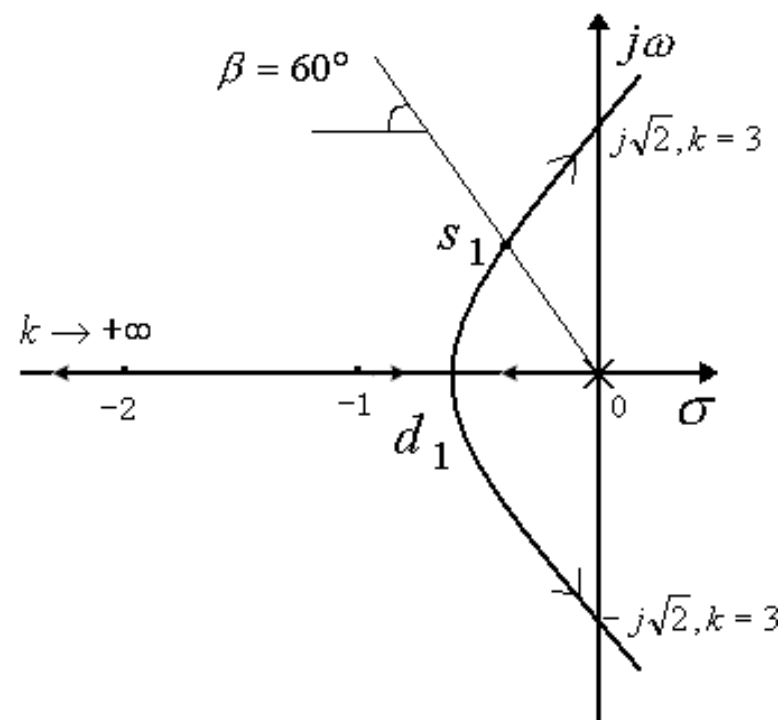
二. 利用主导极点估算系统性能指标

例. 知开环 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$, 用根轨迹法分析系

统的稳定性, 并计算闭环主导极点具有 $\xi = 0.5$ 时的性能指标。

$$\text{解: } G(s) = \frac{2K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

1. 作根轨迹图



①有 3 条根轨迹，起于 0，-1，-2，终于 ∞ 。

②实轴上 $(-1, 0)$ ， $(-\infty, -2)$ 为根轨迹。

③渐近线夹角与坐标

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)}{3}\pi$$

$$= \begin{cases} 60^\circ & k=0 \\ -60^\circ & k=-1 \\ 180^\circ & k=1 \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{(-1)+(-2)+0}{3} = -1$$

④分离点坐标

$$\frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d} = 0$$

$\rightarrow d_1 = -0.428, d_2 = -1.58(\text{舍}), d_3 = ?$ ，试探法，近似求解。

⑤与虚轴交点坐标

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$$



$$(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K^* = 0$$

$$\begin{cases} -\omega^3 + 2\omega = 0 \\ -3\omega^2 + K^* = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \omega_1 = 0, \omega_{2,3} = \pm j\sqrt{2}$$

$$K^* = 6, K = 3$$

可画出根轨迹如图。

2. 分析稳定性

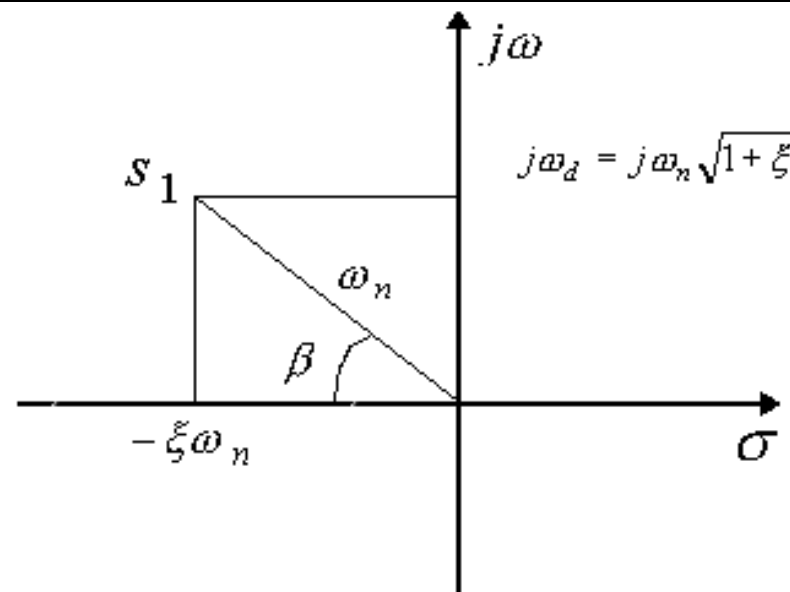
$0 < K < 3$ 时稳定

3. 根据 ξ ，确定闭环主导极点 s_1, s_2 的位置

由 β 的定义：

$$\beta = \arccos \xi = \arccos 0.5 = 60^\circ$$

可画出 $\xi = 0.5$ 时的阻尼线，与根轨迹交点为 s_1 ，可测 $s_1 = -0.33 + j0.58$ ，其共轭 $s_2 = -0.33 - j0.58$ 。



$$K^* = |s_1 - p_1| \cdot |s_1 - p_2| \cdot |s_1 - p_3| = 0.667 \cdot 0.886 \cdot 1.77 = 1.05, \quad K = \frac{1}{2} K^* = 0.525$$



$$s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0, \quad s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$$

用长除法得： $s_3 = -2.34 \approx (7) * 0.33 \rightarrow \therefore s_1, s_2$ 确为主导极点

4. 估算性能指标

$$T(s) \approx \frac{K^*}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{K^*}{s^2 + 0.667s + 0.445} = \frac{K^*}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

\therefore 当 $r(t) = U(t)$ 时

$$M_p = e^{-\xi \cdot \pi \sqrt{1-\xi^2}} = 16.3\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi \cdot \omega_n} = 10.5 \text{秒}$$

三. 根轨迹在校正中的应用

● 校正问题：

若所希望的闭环极点不在根轨迹上，应如何选择校正装置 $G_c(s)$ ，使根轨迹在合适的增益 K 值下通过给定的点。

故需首先研究系统的根轨迹在加入 $G_c(s)$ （即增加开环零极点）时的变化规律。



1. 增加开环极点对系统根轨迹的影响

——哪条准则与 m 、 n 有明显的关系？

∴ 增加极点使渐近线与实轴的夹角

$$\varphi_A = \pm \frac{2k+1}{n-m} \pi \text{ 随 } n \uparrow \text{ 而 } \downarrow, \text{ 向右弯曲}$$

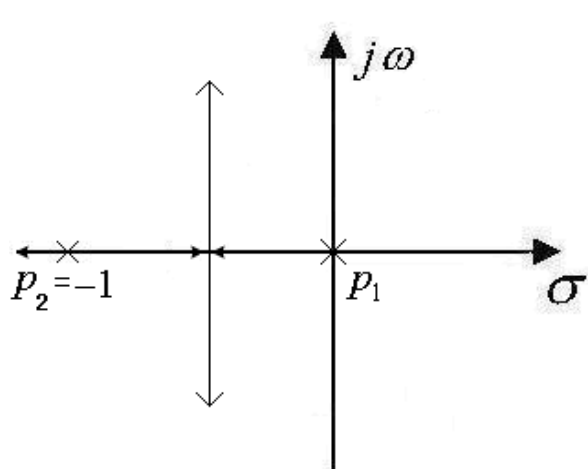
极点个数——弯曲程度，极点位置——平移位置

而渐近线与实轴的交点：

$$\sigma_A = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} \text{ 随着新加极点愈靠近原点向右移}$$

将使原系统的根轨迹向右方弯曲，且右移

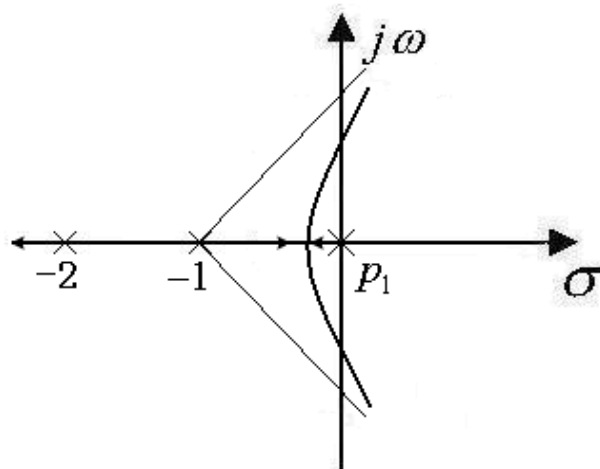




$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

$$\sigma_A = -0.5$$

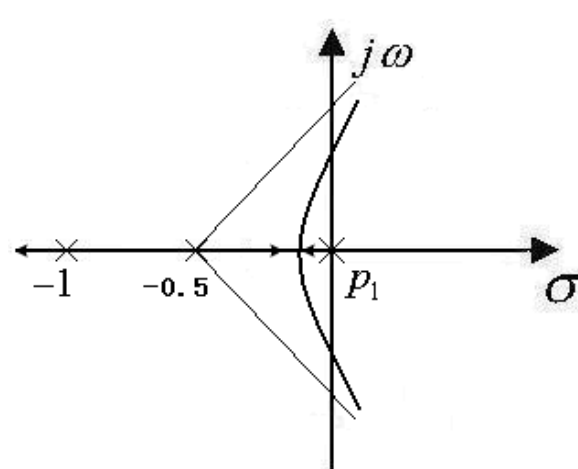
$$\varphi_A = \pm 90^\circ$$



$$\oplus \frac{1}{s+2}$$

$$\sigma_A = -1$$

$$\varphi_A = \pm 60^\circ$$



$$\oplus \frac{1}{s+0.5}$$

$$\sigma_A = -0.25$$

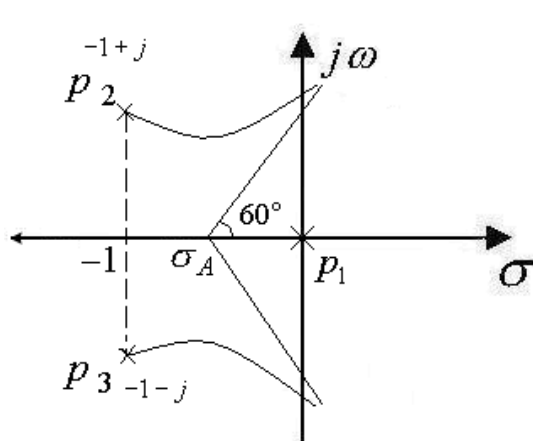
$$\varphi_A = \pm 60^\circ$$



2. 增加开环零点对系统根轨迹的影响

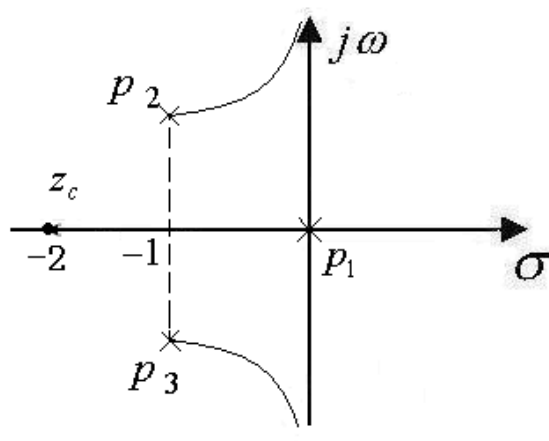
在开环传函上增加零点，将使原系统根轨迹向左方弯曲，而且弯曲的程度将随所增加的零点数目的增加而增大，随着零点距原点的距离变小而加剧。

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)}$$



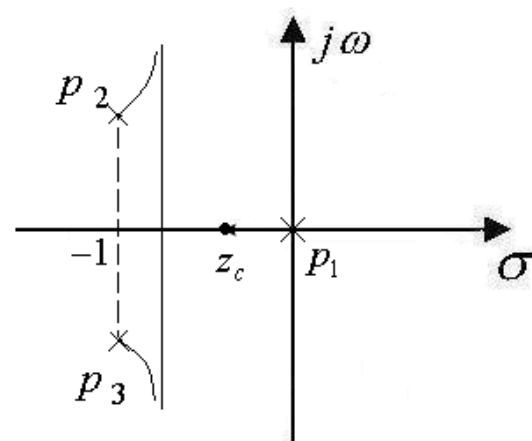
$$\sigma_A = -2/3$$

$$\varphi_A = \pm 60^\circ, \pi$$



$$Z_c = -2 : \sigma_A = 0$$

$$\varphi_A = \pm 90^\circ$$



$$Z_c = -0.5 : \sigma_A = -0.75$$

$$\varphi_A = \pm 90^\circ$$



3. 增加开环零极点对根轨迹的影响

$$G_c(s) = (s - Z_c) / (s - p_c)$$

① $|Z_c| \ll |p_c|$ 时，零点更靠近虚轴，起主导作用，

相当于附加零点，使根轨迹向左弯曲偏移。

② $|Z_c| \gg |p_c|$ 时，相当于附加极点，使根轨迹向右弯曲倾斜。

③ $|Z_c| \approx |p_c|$ —— 增加一对偶极子

$$G(s)H(s) = \frac{K^* \cdot \prod_{i=1}^m (s - Z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad K^*: \text{开环根轨增益}$$

增加偶极子对根轨方程的相角幅值条件不影响。

即不会影响根轨迹的形状。



$$G(s)H(s) = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^N \cdot \prod_{j=1}^{n-N} (T_j s + 1)} ; \quad K: \text{开环增益 (放大倍数)}$$

$$\rightarrow K = K^* \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (-Z_i)}{\prod_{j=1}^{n-N} (-p_j)}$$

加上 Z_c , p_c 后

$$K' = K^* \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (-Z_i)}{\prod_{j=1}^{n-N} (-p_j)} \cdot \frac{(-Z_c)}{(-p_c)}$$

——偶极子离虚轴远，不影响系统性能，离虚轴近，仍为偶极子，但 $|z_c|/|p_c|$ 较大，



影响 K' ，即会影响系统的静态精度。

如 $z_c = 0.05$, $p_c = 0.01$ 时，二者离虚轴已经很近，根轨迹形状不太变，但均对系统精度性能影响较大。

4. 按根轨迹校正反馈系统可依以下步骤进行

- ①根据给定的动态性能指标，确定希望的闭环主导极点的位置。
- ②绘制未校正系统的根轨迹。若希望的主导极点不在此根轨迹上，而且可以看出此根轨迹不可能提供满意的动态性能，则说明不能只靠改变 K 使动态性能满足要求，而需要校正装置改造根轨迹，使其通过希望的主导极点。
- ③若校正后/前的根轨迹已通过希望的闭环主导极点，则检验相应的开环比例系数是否满足要求，若不满足，可采用在 origin 附近 + 开环负实偶极子的办法提高开环比例系数，同时保持根轨迹仍通过希望的主导极点。
- ④校核静、动态指标



§ 4.4 广义根轨迹

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

闭环特征方程 $1 + G(s)H(s) = 0$ 随某参量 β 变化的根轨迹——广义根轨迹。

$$G(s)H(s) + 1$$

$$= \frac{K^* \cdot \prod_{i=1}^m (s - Z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} + 1 \quad \text{——一般根轨迹}$$

$$G(s)H(s) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{C \cdot \beta \cdot \prod_{i=1}^{m_1} (s - Z_{\beta i})}{\prod_{i=1}^n (s - p_{\beta i})} + 1 = 0$$

即构造新的系统，其开环增益为 $C \cdot \beta$ ，而闭环特征方程与原系统相同。



例.右图为带速度反馈位置随动系统，作反馈系数 β 的根轨迹。

$$\begin{aligned} \text{解: } T(s) &= \frac{10}{s^2 + (10\beta + 2)s + 10} \\ &= \frac{s^2 + (10\beta + 2)s + 10}{s^2 + (10\beta + 2)s + 10} \\ &= s^2 + 2s + 10 + 10\beta s \\ &= (s^2 + 2s + 10)\left(1 + \frac{10\beta s}{s^2 + 2s + 10}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore G_{\beta}(s) = \frac{10\beta s}{s^2 + 2s + 10}$$

考虑 $1 + G'(s)H'(s) = 0$

作 $K_{\beta} = 10\beta$ 从0变到 ∞ 时的根轨迹图，就是系统关于参量 β 的广义根轨迹。

