

第二章 控制系统的数学模型

2.1 引言

● 数学模型

- (1) 描述系统输入、输出变量及内部各变量关系的数学表达式。I—O—内部变量
- (2) 系统中各物理量之间相互作用的关系及各自的变化规律用数学形式表达出来。
- (3) 是舍弃了各种事物的具体特点而抽象出它们的共同性质（即运动）来加以研究的工具。

● 控制理论研究的问题是：

- (1) 一个给定的控制系统，它的运动有何性质和特性 — 分析
 - * 运动：泛指一切物理量随时间的变化
- (2) 怎样设计一个控制系统，使其运动具有给定的性质和特性 — 综合和设计



● 工程角度上：控制理论要解决的问题（进一步解释）

- (1) 不满足于求解方程 $c(t)=f(r(t))$ — 数学课程已有
- (2) 提出更深入的问题：
 - a. 这些曲线有何共同性质；
 - b. 系统参数值波动对曲线有何影响？
 - c. 如何修改参数甚至结构才能改进这些曲线，使之满足工程要求。

— 建立控制系统的数学模型，也是研究和解决这些问题的第一步，故建立描述控制系统运动的数学模型是控制理论的基础。

● 数学模型的形式不只一种：

它们各有特长和最合适的场合；

它们彼此之间也有紧密的联系；

各种数学描述方法的共同基础是微分方程；



一元高次微分方程	}	时域分析
多元一次微分方程(状态方程)		
Laplace 变换为工具一	}	频域分析
—		
		传函
		传函阵

§ 2.2 基本数学模型

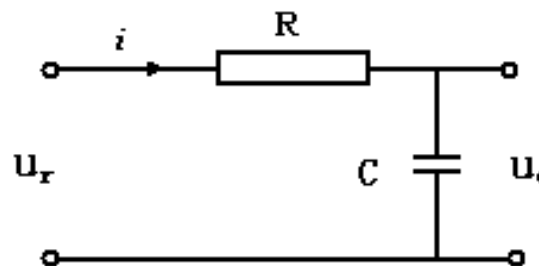
例 用数学模型表示下图的 RC 无源网络给定 u_r 为输入量, u_c 为输出量

解: 由克希霍夫定律

$$u_r = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int i dt$$



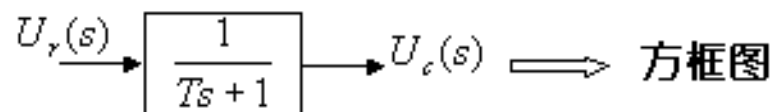
令 $RC = T$ (时间参数), 则微分方程为:

$$T \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

线性定常系统在初始条件为零时, 传递函数为: $\mathcal{L}\{c(t)\}/\mathcal{L}\{r(t)\}$

$$T \cdot s \cdot U_c(s) + U_c(s) = U_r(s) \quad \rightarrow G(s) = U_c(s)/U_r(s) = \frac{1}{T \cdot s + 1}$$

其形式和参数由系统的结构和参数决定, 与 $r(t)$ 无关。



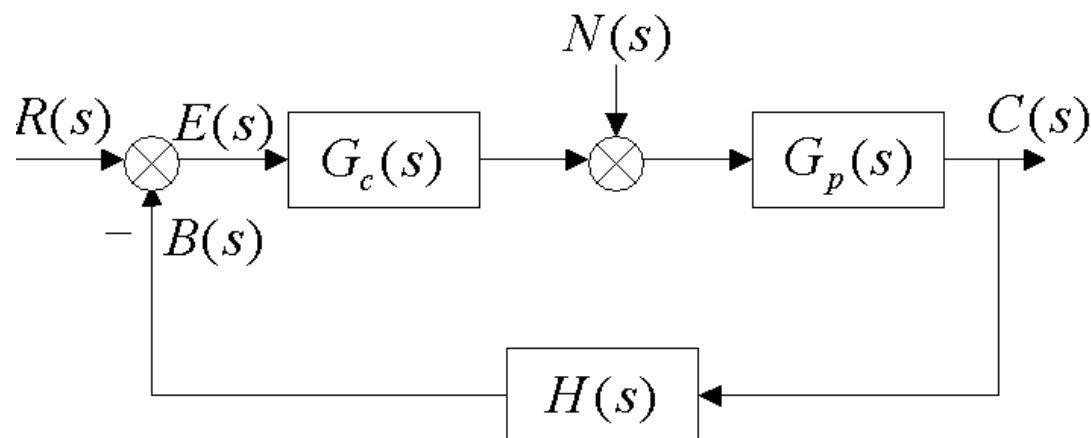
以上为传递函数、微分方程和方框图模型——外部描述法

还有, 状态空间模型——内部描述法



§ 2.3 自动控制系统的的外部描述法

典型闭环控制系统的方块图为：



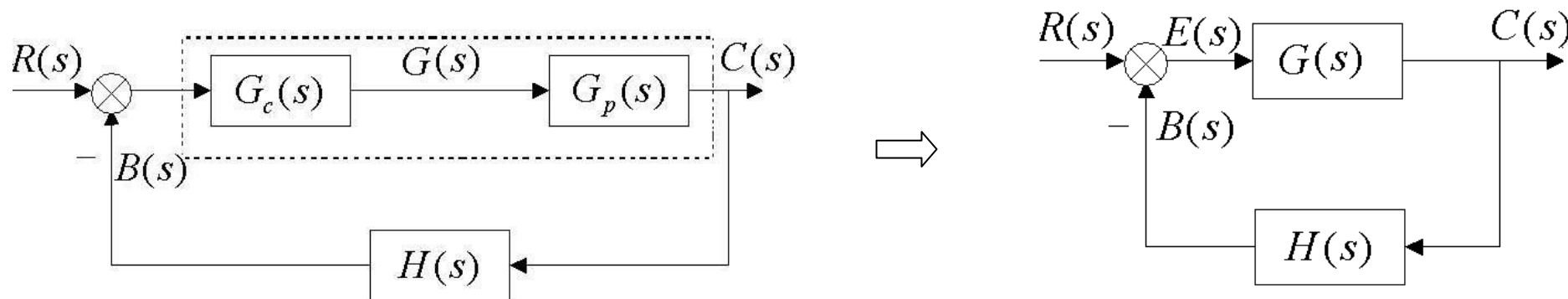
$G_c(s)$ ——控制器的传函；

$G_p(s)$ ——被控对象的传函；

$H(s)$ ——反馈传函（一般为测量元件的传函）

本课程不考虑 $N(s)$ ，此时图为：





即为抽象了的模型。其中：

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{C(s)}{E(s)} \quad \text{为前向传递函数}$$

$$G(s)H(s) = \frac{B(s)}{E(s)} \quad \text{为开环传递函数}$$

$H(s) = 1$ ，即单位反馈时，前向传递函数 = 开环传递函数

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad \text{为闭环传递函数}$$



§ 2.4 典型环节

对于一般的控制系统，其控制元件的数学模型都是由几种简单的因子或典型单元结构组成的，常称为典型环节——最小的数学“元部件”。

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

1. 放大环节

微： $y(t) = K \cdot x(t)$

传： $G(s) = K$; K 一增益、放大系数

2. 惯性环节

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} ; \quad T \text{ 一时间常数, 如 RC 网络}$$



3. 一阶微分环节

$$y(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$G(s) = \tau s + 1; \quad \tau \text{—微分常数, 如一些 RC 无源微分网络}$$

4. 积分环节

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s}; \quad \text{如电机转角与电枢端电压之间}$$

5. 理想微分环节

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$G(s) = s; \quad \text{如测速发电机}$$



6. 振荡环节

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}; \quad \text{如 RLC 网络}$$

7. 二阶微分环节

$$y(t) = \tau^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\tau\xi \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$G(s) = \tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1$$

Note :

元件的 $H(s) = G_1(s) \cdots G_m(s)$; 典型环节 $G(s) = H_1(s) \cdots H_n(s)$

∴ 环节是数学意义上的。

