

## 第三章 时域分析法

- 控制系统在参考输入信号作用下系统输出随时间变化的情况分析，称为系统时域分析。

不只是解方程，要深入分析以下问题：

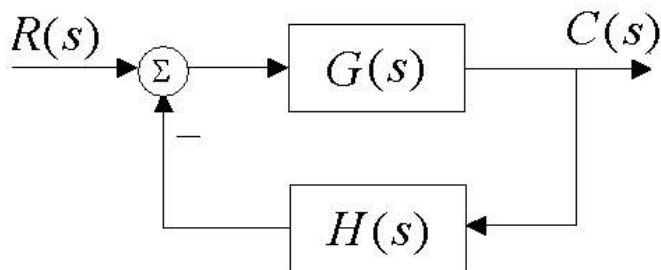
1. 时域输出曲线的共性，
2. 系统参数对性能的影响，
3. 如何改变参数/结构以满足系统性能要求

- $$\text{输出响应} = \underbrace{\text{瞬态响应}}_{\substack{\text{反映动态性能} \\ \text{稳与快}}} + \underbrace{\text{稳态响应}}_{\substack{\text{反映稳态性能} \\ \text{准} (e_{ss})}}$$



## §3.1 典型控制过程及性能指标

### ● 模型:



$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

### ● 影响 $c(t)$ 的因素:

- (1) 系统本身的结构( $m, n$ )、参数( $a_i, b_i$ )
- (2) 初始状态
- (3) 输入



## 一. 典型的初始状态

规定为零状态: 即  $t = 0^-$  时,  $c(0^-) = \dot{c}(0^-) = \ddot{c}(0^-) = \dots = 0$

(简化、抽象至最易分析, 分解——与实际情况不符怎么办?)

## 二. 典型的输入信号

### ● 选取原则

- (1) 反映系统工作实际情况
- (2) 尽可能简单, 便于数学描述和分析处理
- (3) 使系统在最不利情况下运行的信号

### 1. 阶跃信号

$$U(t) = \begin{cases} A & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}; \quad R(s) = \frac{A}{s}$$

### 2. 斜坡信号 (速度信号)

$$A \cdot t \cdot U(t); \quad R(s) = \frac{A}{s^2}$$



### 3. 加速度信号

$$\frac{1}{2}At^2U(t); \quad R(s) = \frac{A}{s^3}$$

### 4. 冲激信号

$$\delta(t); \quad R(s) = 1$$

### 5. 正弦信号

$$A \sin \omega_0 t; \quad R(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

——由 1, 2, 3, 4 的  $r(t)$  可展成泰勒级数,

由 5 的  $r(t)$  可展成付氏级数

## 三. 典型的时间响应

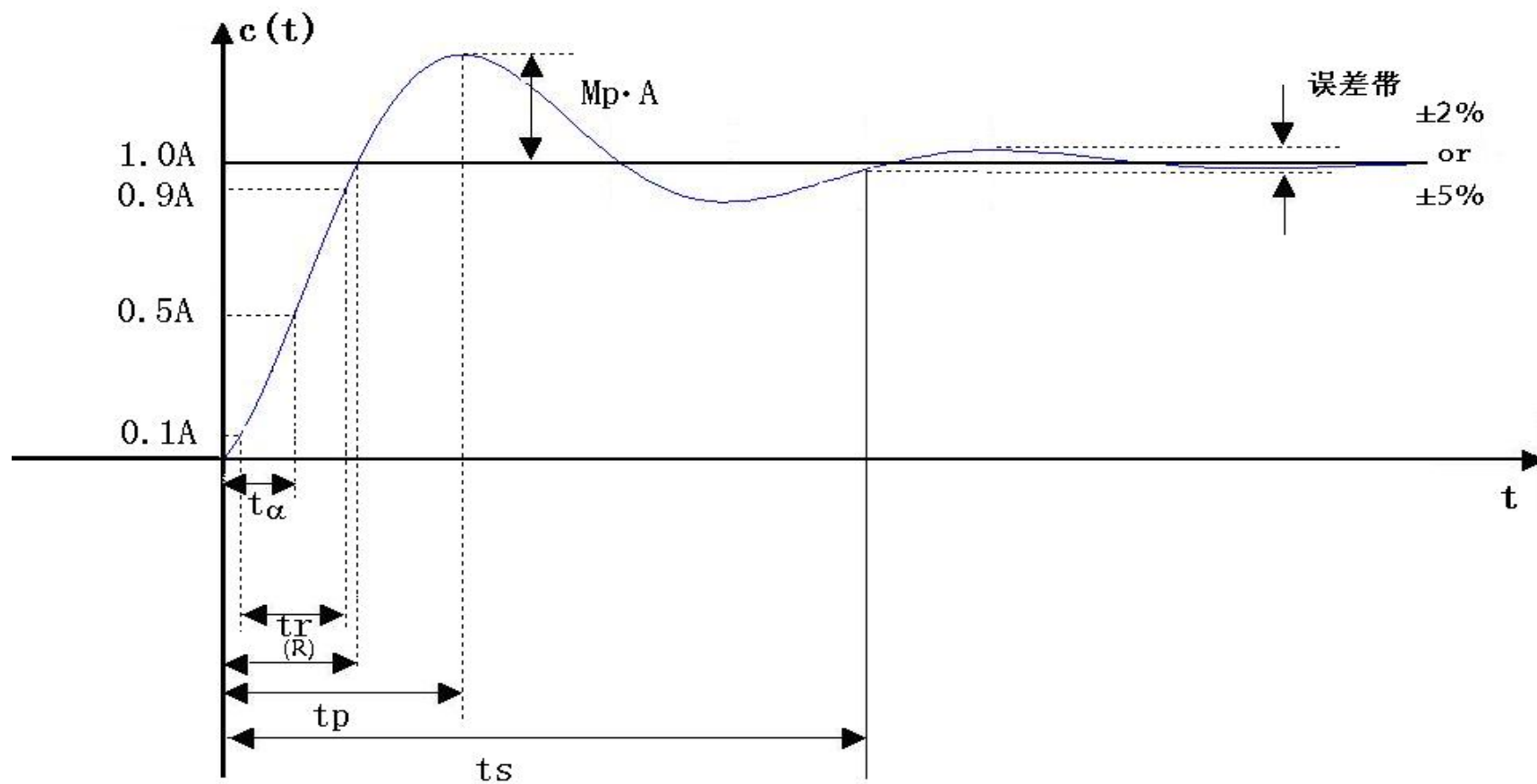
→ 初始状态为零的系统在典型输入作用下的输出  $C(t) = \mathcal{L}^{-1}\{T(s) \cdot R(s)\}$

1. 阶跃信号      // 2. 斜坡信号 (速度信号) // 3. 加速度信号

4. 单位脉冲信号    // 5. 频率响应



## 四. 阶跃响应的性能指标（最差情况）



### 1. 上升时间 $t_r$

$c(t)$ :  $0.1A \sim 0.9A$  (一般);  $0.0A \sim 1.0A$  (欠阻尼)



2. 延迟时间  $t_d$ 

$$c(t): 0 \sim 0.5A$$

3. 峰值时间  $t_p$ 4. 最大超调量  $M_p$ 

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

5. 调整时间  $t_s$  (过渡过程时间)

在  $c(t)$  的稳态值附近取  $\pm 2\%$  (或  $5\%$ ) 作为误差带, 响应曲线达到并不再超过它的最小时间。

6. 稳态误差  $e_{ss}$ 

$$e_{ss} = A - c(\infty)$$

我国工程界:  $M_p$  及  $t_s$  为瞬态指标

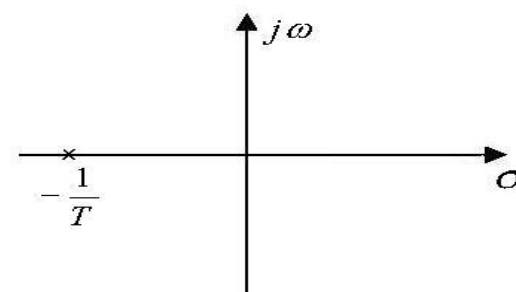
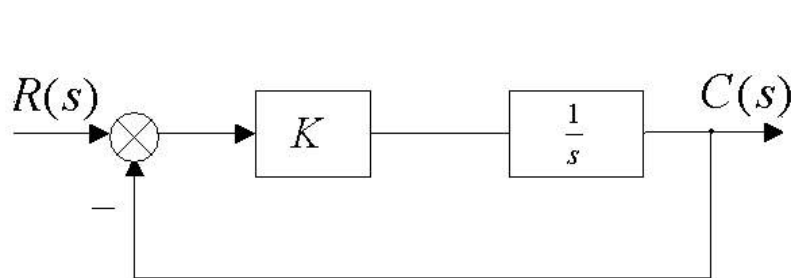


## §3.2 瞬态响应分析

线性系统（有理函数）：
$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

### 一、一阶系统的时域分析

数学模型：



$T(s)$ 的极零分布→

传递函数：
$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K}s + 1} = \frac{1}{Ts + 1}, \quad \begin{cases} K > 0 \\ T > 0 \end{cases}$$

微分方程：
$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$



## 1. 单位阶跃响应

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = T(s)R(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

$$\longrightarrow c(t) = (1 - e^{-\frac{1}{T}t})U(t)$$

性能:

$$t_s = 3 \cdot T \quad (5\%\Delta)$$

$$= 4 \cdot T \quad (2\%\Delta)$$

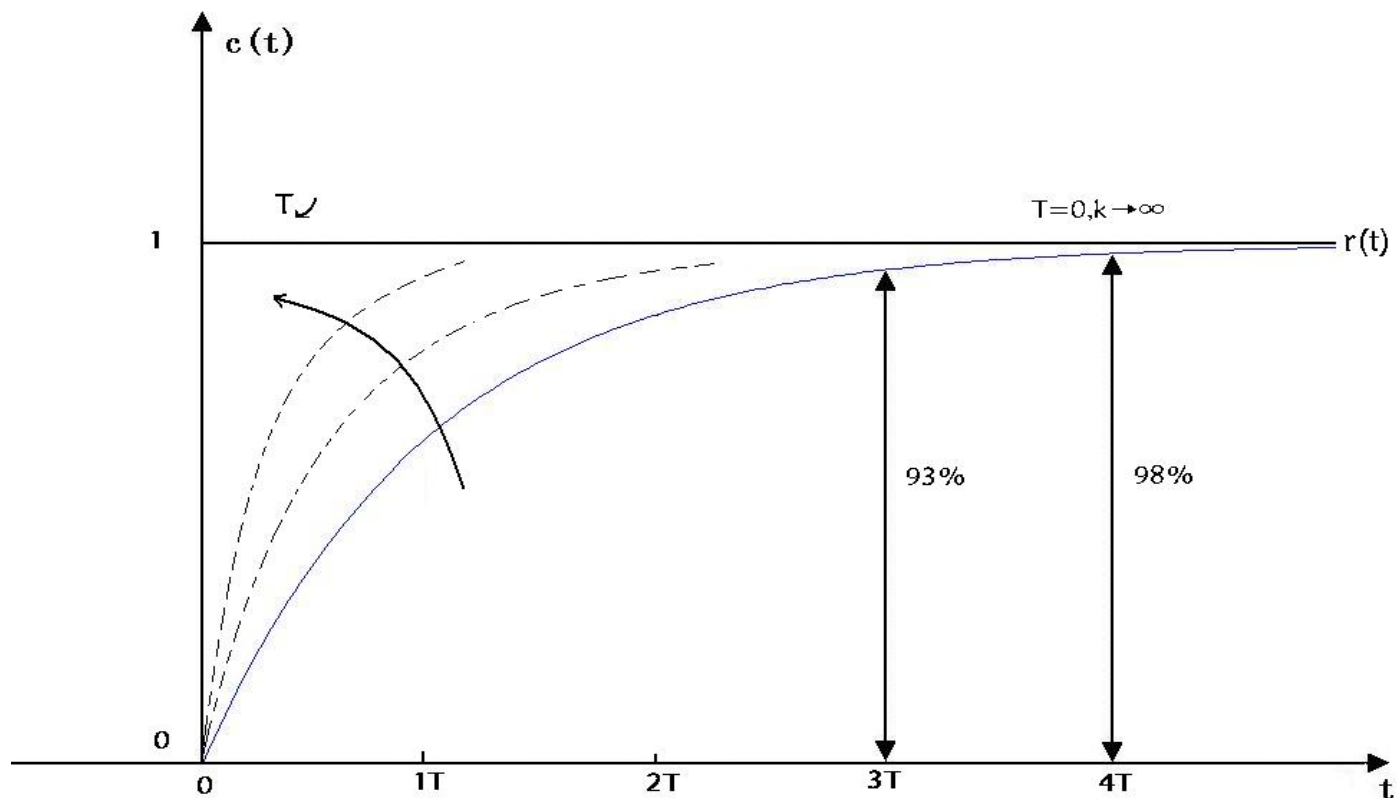
$$e_{ss} = 1 - C(\infty) = 0$$

(对曲线所作的各种分析才为控制系统所需)





● 开环增益  $K \uparrow \rightarrow$  时间常数  $T \downarrow \rightarrow t_s \downarrow$ : 惯性减小。



## 2. 单位斜坡响应

$$R(s) = \frac{1}{s^2}; \quad c(t) = (t - T + T \cdot e^{-\frac{1}{T}t}) \cdot U(t)$$



性能:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [c(t) - r(t)] = T$$

### 3. 单位脉冲响应

$$R(s) = 1$$

$$c(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{1}{T}t} \cdot U(t)$$

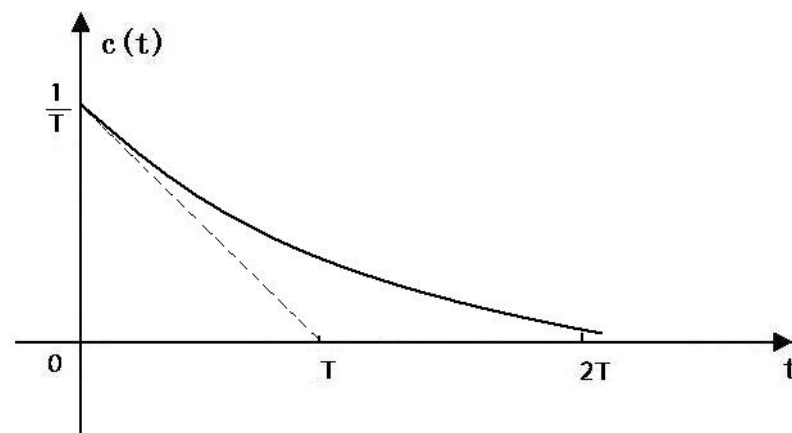
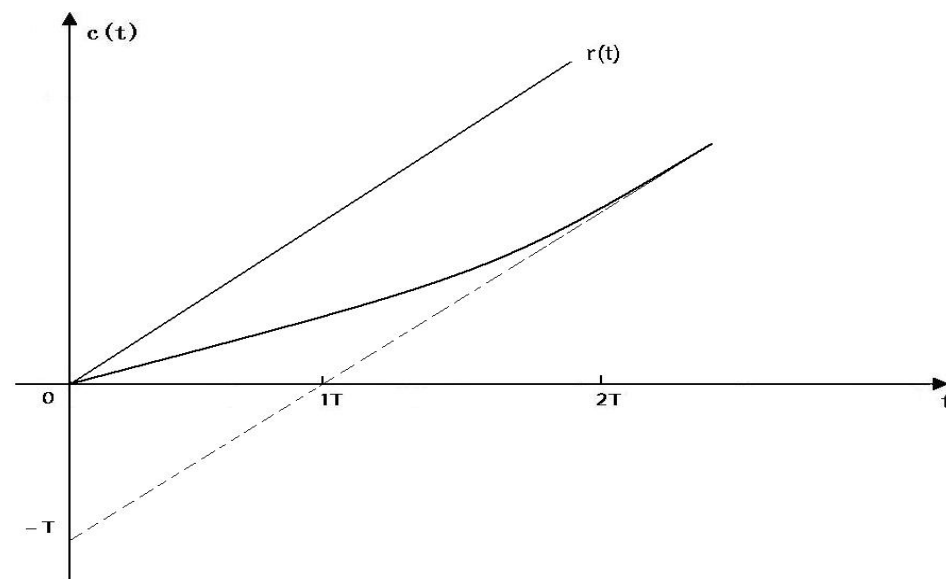
$T \downarrow \rightarrow$  响应越快,

$$c(t) \rightarrow \delta(t)$$

#### ● 结论:

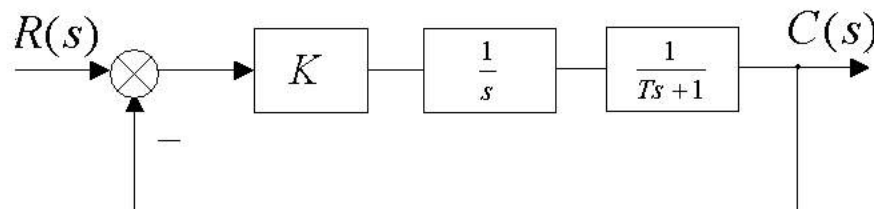
(1)  $T$  越小 ( $K$  越大), 一阶系统越快、越准。

(2) 一阶系统是固有稳定的。



## 二、二阶系统的时域分析

- 重点了解快速性指标的设计方法及指标与参数之间的关系
- 数学模型:



闭环传递函数:  $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$  ——物理意义

标准形式:  $T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)}$  ——数学特性

$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} > 0$  ——无阻尼振荡频率

$\xi = \frac{1}{2\sqrt{KT}} > 0$  ——阻尼比



## ● 系统的瞬态响应取决于闭环极点

$$\text{闭环特征方程: } s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\text{方程特征根: } s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

### 1. 单位阶跃响应

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$c(t) = L^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} \cdot \frac{1}{s} \right\}$$

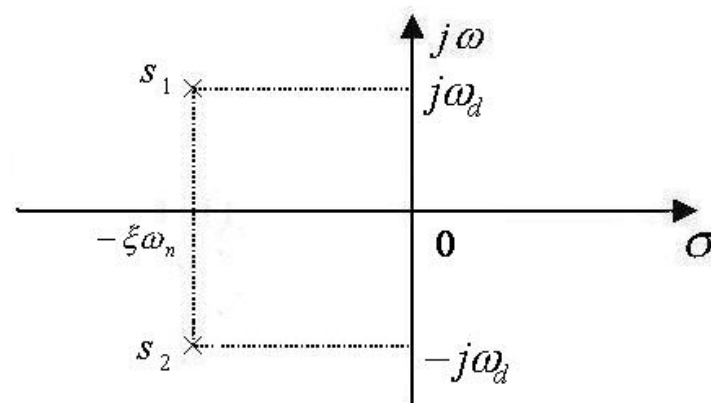
#### (1) 欠阻尼二阶系统 ( $0 < \xi < 1$ )

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d; \text{ 共轭复根}$$

其中  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} < \omega_n$  —— 阻尼自然频率。

$T(s)$  极零分布图:

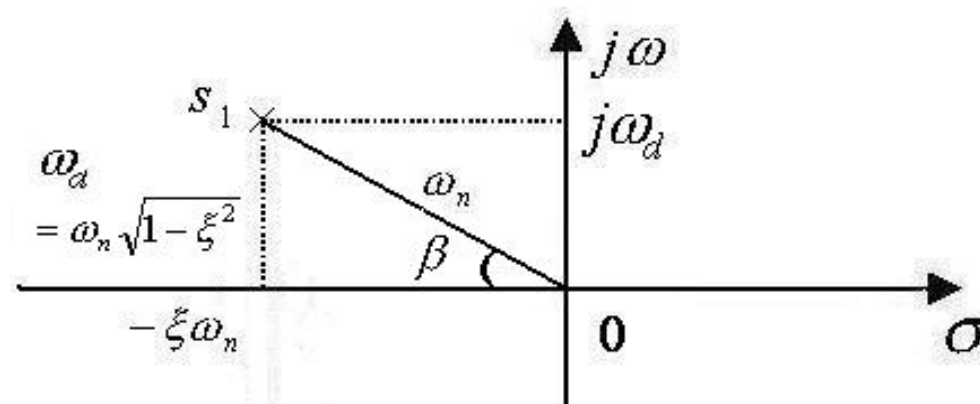
- 实部始终 $<0$
- 离虚轴越远衰减越快



$$c(t) = \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \beta) \right] \cdot U(t)$$

$$\text{其中 } \beta = \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$= \arccos \xi$  , 如右图所示



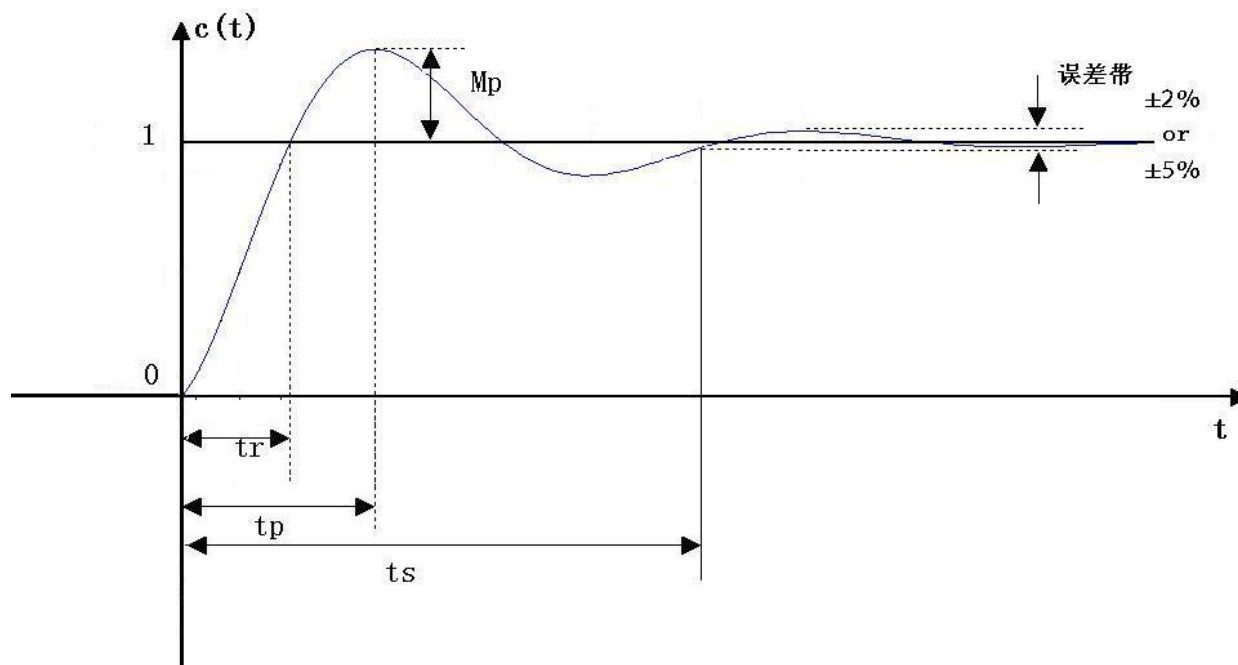
## ● 性能

(a) 上升时间  $t_r$

$$\text{由 } c(t_r) = 1 \rightarrow t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

(b) 峰值时间  $t_p$

$$\text{由 } \left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$$



$$\text{及 } \beta = \arccos \xi \rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

(c) 最大超调量  $M_p$

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

$$\text{由 } c(\infty) = 1 \text{ 及 } \sin(\pi + \beta) = -\sin \beta \xrightarrow{\beta = \arccos \xi} -\sqrt{1 - \xi^2}$$

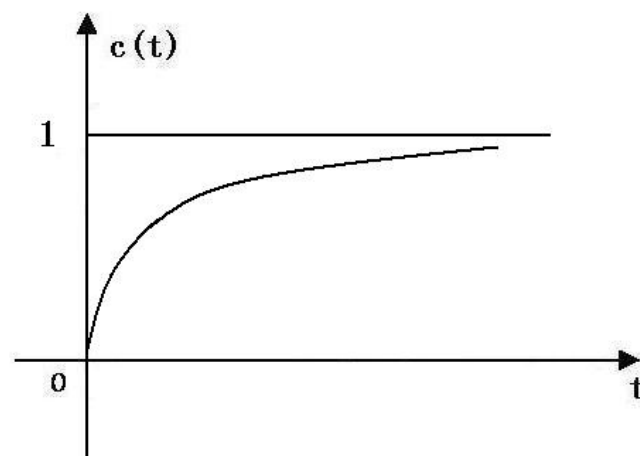
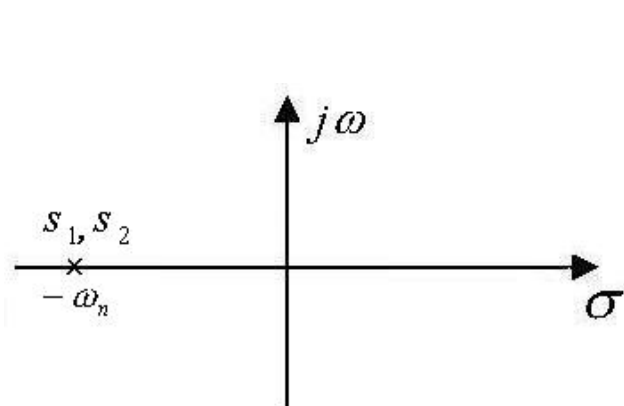
(d) 调整时间  $t_s$

$$\text{近似公式: } \xi < 0.9 \text{ 时, } t_s = \begin{cases} \frac{4}{\xi\omega_n} & 2\%\Delta \\ \frac{3}{\xi\omega_n} & 5\%\Delta \end{cases} \quad \text{—— } \xi \uparrow \Rightarrow t_s \uparrow\uparrow$$

(2) 临界阻尼二阶系统( $\xi = 1$ )——是否振荡的界

$s_1 = s_2 = -\xi\omega_n$  ,  $T(s)$ 的极零分布图:





$$c(t) = [1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}] U(t)$$

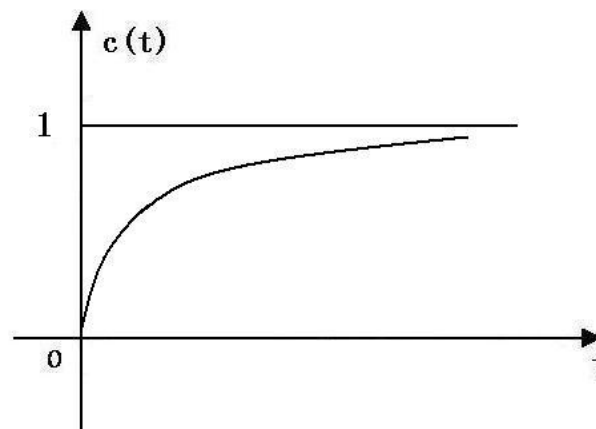
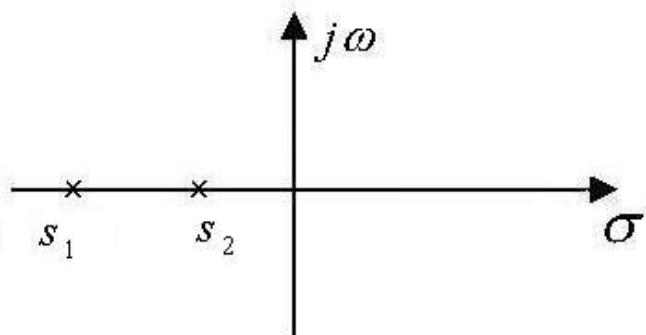
### (3) 过阻尼系统( $\xi > 1$ )

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$c(t) = [1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} (\frac{1}{s_1} e^{-s_1 t} - \frac{1}{s_2} e^{-s_2 t})] U(t)$$

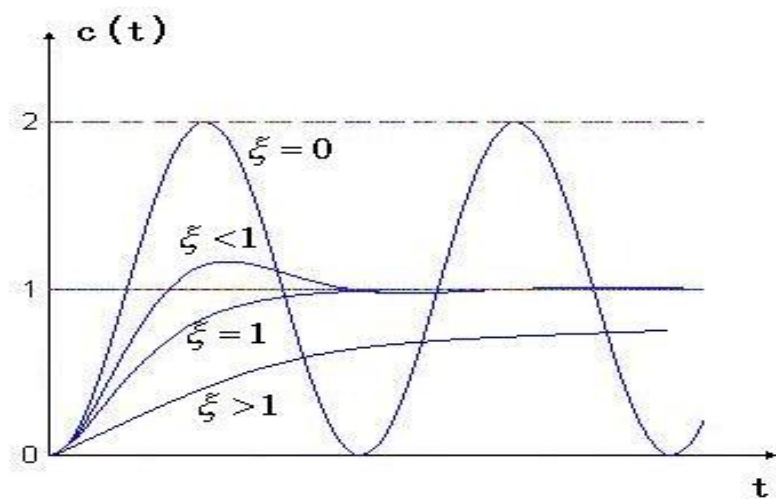
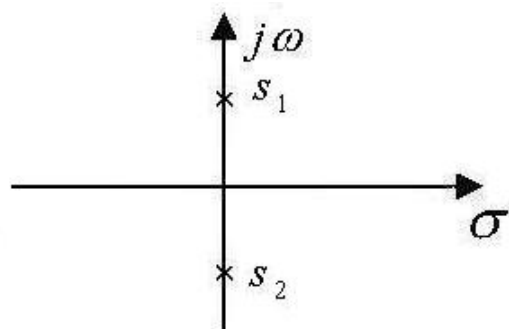
当  $s_2 > 4s_1$  时, 等效为一阶系统





#### (4) 零阻尼系统( $\xi=0$ )(稳定与否的界)

$s_{1,2} = \pm j\omega_n$  共轭复根;  $c(t) = (1 - \cos \omega_n t)U(t) \rightarrow$  参数  $\xi$ ,  $\omega_n$  决定  $c(t)$ 。





### (a) 平稳性

$\xi \uparrow \Rightarrow M_p \downarrow$ , 平稳性好,  $\xi = 0$  振荡

由  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $\xi$  一定,  $\omega_n \uparrow \Rightarrow \omega_d \uparrow$ , 平稳性差

$\therefore$  平稳性好, 要求  $\xi$  大,  $\omega_n$  小。

### (b) 快速性

$\xi$  过大  $\Rightarrow t_s \uparrow$ , 响应迟钝, 快速性差。

$\xi$  过小  $\Rightarrow$  响应起始速度快, 但衰减慢,  $t_s \uparrow$ , 差。

$\rightarrow$  对 5% 的  $\Delta$ , 当  $\xi = 0.707$  时,  $t_s$  最短, 且  $M_p < 5\%$ 、平稳性也好, 称为最佳阻尼比。

当  $\xi$  一定时,  $\omega_n \uparrow \Rightarrow t_s \downarrow$ , 快速性好。

### (c) 稳定精度

当  $\xi \neq 0$  时,  $e_{ss} = 0$ 。

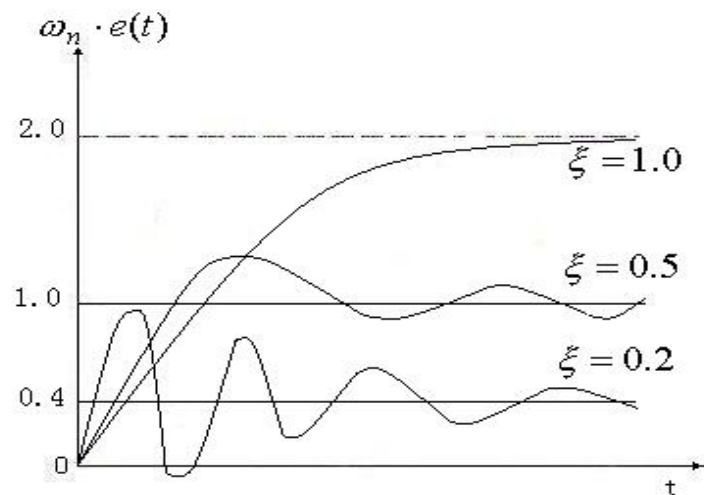
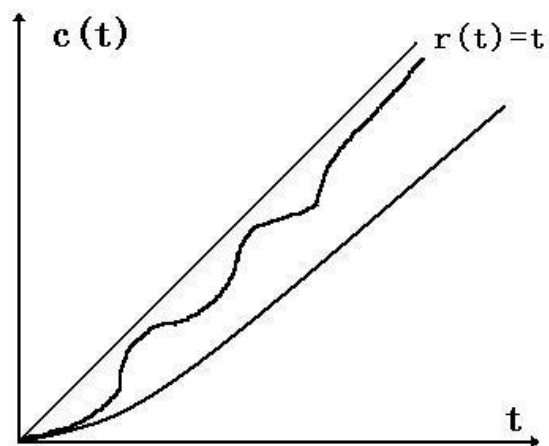
### (d) 稳定性

当  $\xi > 0$  时, 系统稳定。



## 2. 单位斜坡响应

$$c(t) = t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + 2\beta), \quad t \geq 0$$



$$e_{ss} = \frac{2\xi}{\omega_n}$$



出现误差峰值的时间:

$$t_{ep} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad \left( \frac{de(t)}{dt} = 0 \right)$$

误差上升时间 (误差第一次达到稳态的时间):  $t_{er} = \frac{\pi - 2\beta}{\omega_d}$

误差最终达到稳态值的调整时间

$$t_{es} = \begin{cases} 4/\xi\omega_n & \Delta = 0.02 \\ 3/\xi\omega_n & \Delta = 0.05 \end{cases}$$

⇒ 可见单位阶跃响应的指标也反映了斜坡输入时的性能 (误差特性)

$$\text{且 } t_{ep} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} < t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (\text{单位阶跃})$$

$$t_{er} = \frac{\pi - 2\beta}{\omega_d} < t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (\text{单位阶跃})$$

$$t_{es} == t_s \quad (\text{单位阶跃})$$



### 三、高阶系统的时域分析

#### 1. 三阶系统的单位阶跃响应

典型三阶系统的闭环传函为

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(Ts + 1)}$$

其三个极点为:

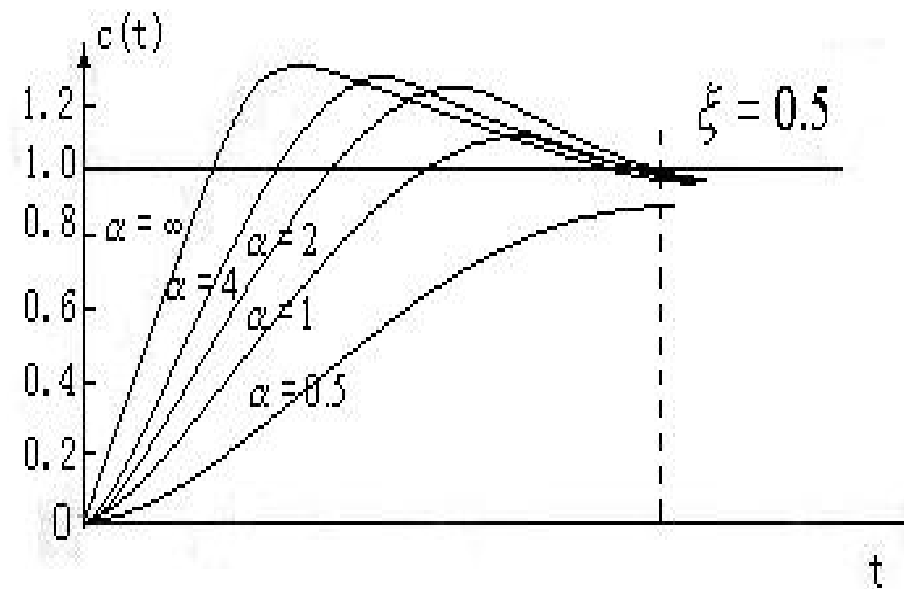
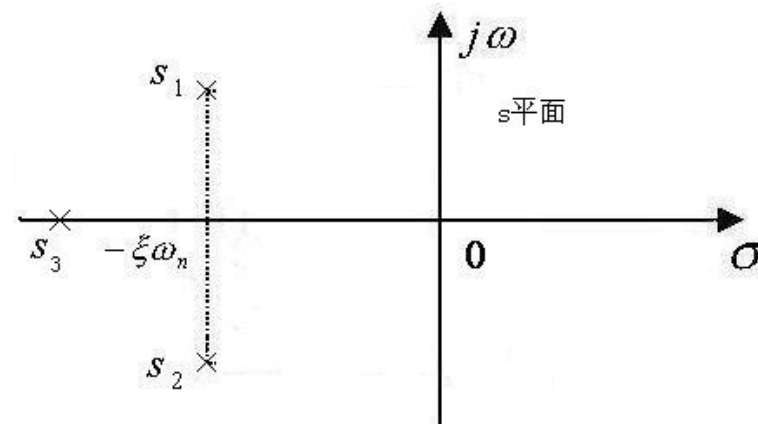
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_3 = -p_3$$

$$c(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1s + a_2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{a_3}{s + p_3}$$

令  $\alpha = \frac{p_3}{\xi\omega_n}$  为实数极点与复数极点实部之比





分析:

- (1) 在典型的二阶系统中增加了一个实极点,使原来二阶系统的单位阶跃响应的  $M_p \downarrow$ ,  $t_r \uparrow$ ,  $t_p \uparrow$ , 因  $e^{-p_3 t}$  的系数为负。
- (2)  $\alpha = \infty$  时, 三阶系统的单位阶跃响应 = 二阶系统,  $\alpha$  足够大(如  $\alpha > 5$ ) 时, 二者非常接近。
- (3)  $\alpha \ll 1$  时, 三阶系统的一对共轭复数极点比实极点远离虚轴, 接近一阶系统的阶跃响应。
- (4)  $\alpha$  取一般值时, 三阶系统相当于一阶和二阶系统的串联。当实极点从左侧向复数极点靠近时, 实极点越靠近复数极点, 影响越大,  $M_p$  越小,  $t_r$ ,  $t_p$  越  $\uparrow$ 。

当  $\alpha = 1$  时, 输出响应已无过调;

当  $\alpha > 1$  时, 即实极点位于复极点右侧, 系统已表现为过阻尼。

## 2. 附加闭环零点对系统性能的影响

$T(s)$  由典型二阶系统+一阶分环节组成:



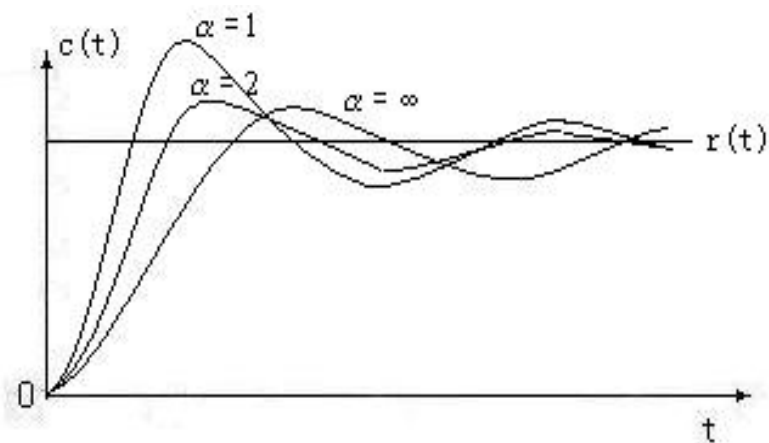
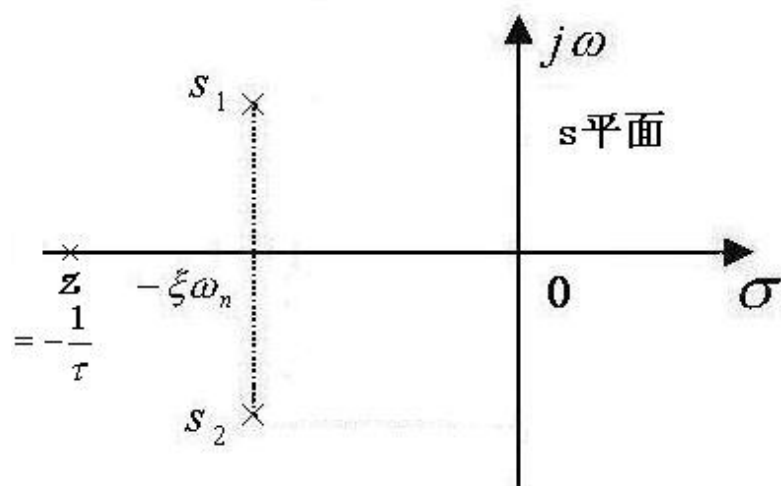
$$T(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

$$\text{设 } \alpha = \frac{z}{\xi\omega_n} = \frac{1}{\xi\omega_n\tau}$$

分析: (1)  $\alpha \rightarrow \infty$  时,  $z = \infty$ ,  $\tau = 0$  无零点。

(2)  $\alpha$  很大时, 零点与复数极点相距很远, 影响很小。

(3) 随着零点靠近复数极点,  $\alpha \downarrow$ ,  $M_p \uparrow$ ,  $t_r \downarrow$ 。



### 3. 高阶系统的时域分析

$$T(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

假设:

- 物理可实现— $n \geq m$
- 便于讨论—设无重极点, 设可以因式分解

$$\begin{aligned} \rightarrow C(s) &= \frac{b_m \prod_{i=1}^q (s + Z_i) \prod_{i=1}^l (s^2 + 2\xi_{mi} \omega_{mi} s + \omega_{mi}^2)}{\prod_{i=1}^k (s + Z_i) \prod_{i=1}^r (s^2 + 2\xi_{ni} \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{s + p_i} + \sum_{i=1}^r \frac{A_i (s + \xi_{ni} \omega_{ni}) + B_i \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_{ni}^2}}{s^2 + 2\xi_{ni} \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2} \\ &= \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i} \end{aligned}$$





$$(A_k)_{k \neq n} = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (p_k - Z_i)}{p_k \prod_{i=1}^{k-1} (p_k - p_i) \cdot \prod_{j=k+1}^n (p_k - p_j)}$$

(↑ 留数计算)

分析:

1. 各瞬态响应分量对  $c(t)$  的影响主要取决于:

➤ 极点在  $S$  平面上的位置

在负实轴上: 相应的瞬态分量为单调衰减的

不在负实轴上: 相应的瞬态分量为衰减振荡的 ( $S$  左半平面)

极点负实部的大小决定了相应分量衰减的快慢。衰减得越快, 该响应分量在  $c(t)$  中的影响越小。

极点实部大于 0, 在  $S$  右半平面, 不稳定。

➤ 瞬态响应分量的系数



此系数取决于系统零极点在  $S$  平面的分布

极点距虚轴很远，它所对应的瞬态响应分量的系数很小（且持续时间也很短）

极点附近有一个零点，它所对应的瞬态响应分量的系数很小

2. 根据上述原则，引入如下两个概念：

- 若某极点最靠近虚轴，且附近无零点，则这些极点所对应的瞬态响应分量在系统中起主要作用，称之为主导极点。

若某些极点至虚轴的距离是主导极点 5 倍以上，则这些极点对应的瞬态分量可以忽略不计。

- 偶极子

虽然有的极点靠近虚轴，但其附近有一个零点，若二者间的距离比其本身的模小一个数量级，则构成偶极子。此时这个极点上的留数很小，其瞬态响应分量可以忽略不计。

3. 由以上概念，可对高阶系统作如下处理：

- 系统有主导极点，其他极点作用可忽略不计；



主导极点为共轭复数: 高阶系统 $\Rightarrow$ 二阶系统

主导极点为单个实极点: 高阶系统 $\Rightarrow$ 一阶系统

- 系统除一对主导极点外, 还有一个不可忽略的极点;

高阶系统 $\Rightarrow$ 三阶系统

由于实极点的存在, 使典型的二阶系统 $t_r, t_p \uparrow, M_p \downarrow$ , 此时若还想保持二阶系统的性能, 则应把 $\xi$ 选得小一些。

- 系统除一对主导极点外, 还有一个靠近虚轴的零点;

高阶系统 $\approx$ 有零点的二阶系统

零点的作用, 使典型的二阶系统的 $t_r, t_p \downarrow, M_p \uparrow$ ;

此时若还想保持原二阶系统的性能, 则应把 $\xi$ 选得大一些。

- 无主导极点——没办法。



## §3.3 稳定性分析

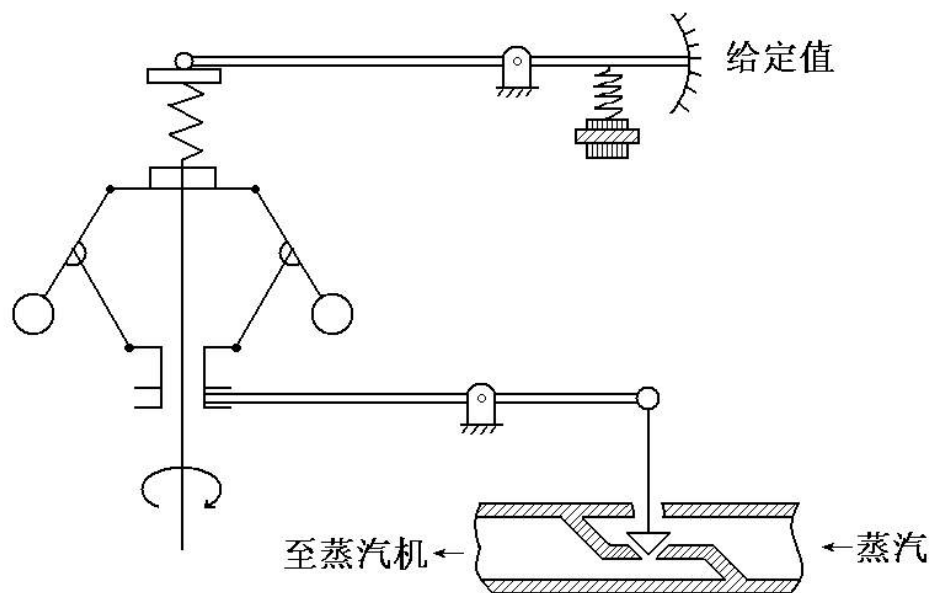
### ➤ 瓦特离心调速器

被控量: 转速  $V$

原理: 根据希望的转速, 设置参考输入量。

若实际转速 < 希望转速: 离心力下降 → 控制阀上升 → 增加蒸汽量 → 提高转速。

若实际转速 > 希望转速: 离心力上升 → 控制阀下移 → 减小蒸汽量 → 降低转速。

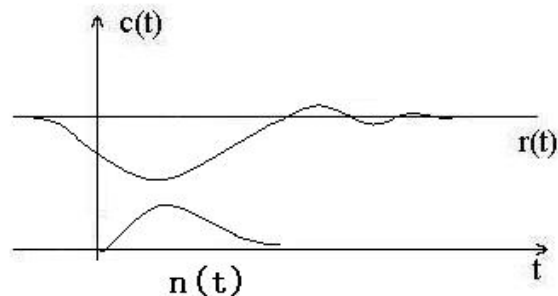
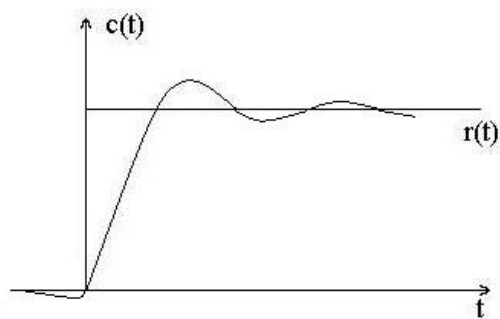


## 一、稳定的概念及数学条件

### 1. 概念(内部惰性、外部干扰)

#### (1) 零初始

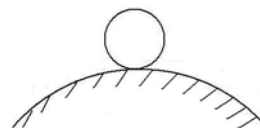
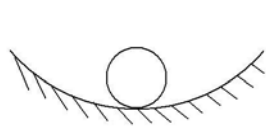
有界输入 $\rightarrow$ 有界输出 $\Rightarrow$  BIBO 稳定



#### (2) 零输入（或输入不变）

干扰作用后，在初始值作用下逐渐回原状态 $\Rightarrow$ 平衡点稳定

若在初始扰动影响下，系统动态过程随时间推移而发散，则系统不稳定。



“碗面”材料不同→参数不同 ——与系统本身结构参数有关，由 $T(s)$ 决定。

本质：瞬态响应 $c_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

## 2. 数学条件

### ➤ 零状态

若闭环传递函数 $T(s)$ 有 $n$ 个互异极点 $s_i$ ，输入 $R(s)$ 有 $m$ 个互异极点 $s_{rj}$ ，

$$\text{则 } C(s) = T(s)R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - s_i} + \sum_{j=1}^m \frac{B_j}{s - s_{rj}}, \quad A_i, B_j \text{ 待定常数}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} c(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{s_i \cdot t} + \sum_{j=1}^m B_j \cdot e^{s_{rj} \cdot t} = \underbrace{c_1(t)}_{\text{瞬态}} + \underbrace{c_2(t)}_{\text{稳态}}$$

系统稳定 $\Leftrightarrow c_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ ，（充分长时间后， $c(t)$ 完全由输入量确定而与初始条件无关，这时工程上认为过渡过程结束，系统进入了静态。）

$$\text{即 } \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{s_i \cdot t} = 0 \xleftarrow{\text{各项均为0}} \lim_{t \rightarrow \infty} A_i \cdot e^{s_i \cdot t} = 0$$

### ➤ 零输入 ➔ 见书



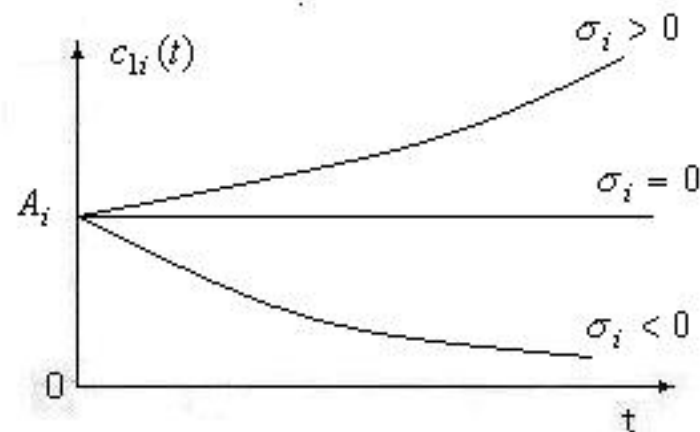
### 3. 闭环极点 $s_i$ 的性质对稳定性的影响

(1)  $s_i$  为实根,  $s_i = \sigma_i$ ,

$$\sigma_i < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{s_i \cdot t} = 0;$$

$$\sigma_i = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{s_i \cdot t} = A_i;$$

$$\sigma_i > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{s_i \cdot t} = \infty;$$



(2)  $s_i$  为共轭复根,  $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ ,

$$c_{li}(t) = A_i \cdot e^{(\sigma_i + j\omega_i) \cdot t} + A_i \cdot e^{(\sigma_i - j\omega_i) \cdot t} = A_i \cdot e^{\sigma_i t} \cdot \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_{li}(t) = \begin{cases} 0 & \sigma_i < 0 \\ A_i \cdot \sin(\omega_i t + \phi_i) & \sigma_i = 0 \\ \infty & \sigma_i > 0 \end{cases}$$

#### ● 结论

$\sigma_i > 0$ , 不稳定;



$\sigma_i < 0$ , 临界稳定  $\rightarrow$  不稳定;

$\sigma_i = 0$ , 系统稳定;

$\therefore$  稳定  $\Leftrightarrow$  闭环极点应在  $s$  平面虚轴之左。

## 二、劳斯稳定判据

1877 劳斯判据——使用方便, 得到广泛应用。

1895 赫尔维兹判据。

1. 问题:  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \quad a_n > 0$

$a_i$  满足什么条件  $\Leftrightarrow \operatorname{Re}[s_i] < 0$

2. 引出稳定的必要条件

● 分析:

一阶:  $a_1 s + a_0 = 0, \quad a_1 > 0 \Leftrightarrow s - s_1 = 0, \quad s_1 = -\frac{a_0}{a_1}$

若  $\operatorname{Re}[s_1] < 0$ , 则  $a_0 > 0, \quad a_1 > 0$ 。





$$\text{二阶: } a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, \quad a_2 > 0, \quad s_1 + s_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad s_1 \cdot s_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

若  $\text{Re}[s_{1,2}] < 0$ , 则  $a_0, a_1, a_2 > 0$ 。

● 猜想:

稳定 ( $\text{Re}[s_i] < 0$ )  $\xrightarrow{\text{必要}}$   $a_i > 0, i = 1, \dots, n$ 。

● 证明:

$a_i > 0, i = 1, \dots, n$  为稳定的必要条件。

### 3. 引出稳定的充分必要条件

● 猜想:

稳定  $\xleftarrow{\text{充分}}$   $a_i > 0, i = 1, \dots, n$ ?

反例:  $s^3 + s^2 + s + 1 = (s + 1)(s^2 + 1) = 0, s_1 = -1, s_{2,3} = \pm j$ 。

● 分析: 三阶系统  $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$  的特例

a.  $(s + 1)(s + 2)(s + 3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$



$$\text{b. } (s+2)(s+4)(s+6) = s^3 + 12s^2 + 44s + 48 = 0$$

$$\text{c. } (s+1)(s^2+1) = s^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

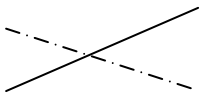

$$\text{d. } (s+1)(s-2)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0$$

系统 a, b 稳定:  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ ;

系统 c, d 不稳定:  $a_1a_2 - a_0a_3 \leq 0$ 。

$\Rightarrow$  当  $\frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_2} > 0$  时, 系统一定稳定!

● 猜想:

$s^3$	$a_3$		$a_1$	$s^2$	$a_2$		$a_0$	$s^1$	$a_1$
$s^2$	$a_2$		$a_0$	$s^1$	$a_1$		$0$	$s^0$	$a_0$
$s^1$	$\Delta_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_2}$		$0$	$s^0$	$\frac{a_1a_0 - a_2 \cdot 0}{a_1} = a_0$				
$s^0$	$\frac{\Delta_1a_0 - a_2 \cdot 0}{\Delta_1} = a_0$								



## ● 证明：劳斯稳定判据

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_1$	$c_1$	$c_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$					
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$					
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$					
$s^2$	$e_1$	$e_2$					
$s^1$	$f_1$						
$s^0$	$g_1$						



$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

.

.

$$g_1 = \frac{f_1 e_2 - e_1 \cdot 0}{f_1} = e_2$$



- 注意:
1. 交叉乘法的次序与行列式相反
  2. 首先判断 $a_i > 0$ 是否成立, 若满足再用劳斯表判断
  3. 若 $a_n < 0$ , 方程系数全乘以-1

劳斯判据: 劳斯数列中的第一列全部为正数且不能为零。——**稳定的充要条件!** 若第一列中系数符号不同, 则符号改变的次数等于系统在右半平面极点的个数。

**稳定的充要条件——全部系数都同号。**

书上例 3-3, 3-4 (出现  $0 \rightarrow \varepsilon$ ), 3-5 (一行均为 0, 求导)

劳斯判据不仅可以判断系统是否稳定, 而且还能判断系统极点是否位于平行于虚轴的直线  $s=a$  的左侧, 即检查相对稳定性。

作法: 移动  $s$  平面的  $Y$  轴, 再用劳斯判据。

即以  $s = z - a$  代入特征方程, 得到以  $z$  为变量的特征多项式, 对  $z$  用判据, 则第一列符号改变的次数就等于原特征方程根位于  $s = -a$  右边根的数目。



### §3.4 稳态误差分析

#### 一. 稳态误差的定义与计算

系统误差的基本定义：要求值与实际值之差。

- 若  $r(t)$  与  $c(t)$  同量纲且同数量级

则  $e(t) = r(t) - c(t)$ 。

- 若  $r(t)$  与  $c(t)$  不同量纲或不同数量级

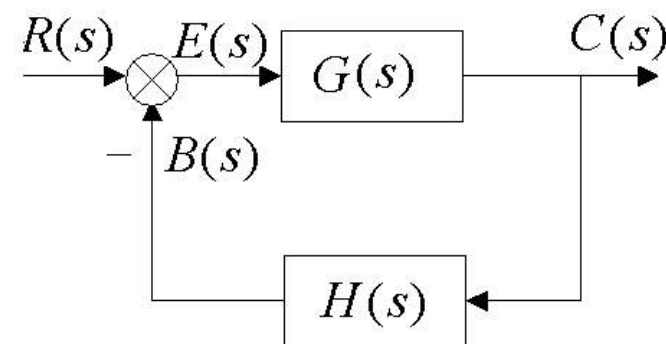
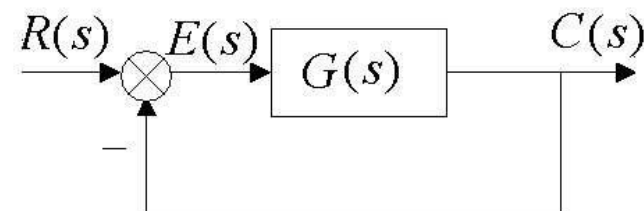
##### ①输入端定义法

$$e(t) = r(t) - B(t)$$

##### ②输出端定义法

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

无法测，只有数学意义，在性能指标中用。



$e(t)$  ——系统误差响应, 反映系统在跟踪  $r(t)$  整个过程中的精度。

$e_{ss}$  ——稳态误差

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \stackrel{\text{终值定理}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned}$$

在求  $e_{ss}$  之前, 首先要判稳定性。

## 二. 稳态误差分析

### 1. 系统的型别

系统开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_2^2 s^2 + 2\xi' \tau_2 s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1) \cdots (T_2^2 s^2 + 2\xi T_2 s + 1) \cdots}$$



称积分环节数  $N=0$  的系统为 O 型系统;

称积分环节数  $N=1$  的系统为 I 型系统。

## 2. 静态误差系数

$$\text{静态位置误差系数 } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^N};$$

$$\text{静态速度误差系数 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{N-1}}。$$

$$\text{静态加速度误差系数 } K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{N-2}}$$

## 3. $r(t)$ 作用下的 $e_{ss}$ 与系统结构的关系

$$(1) \quad r(t) = U(t)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$





$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + K_p}$$

系统型

别 N

O	I	II	III	...
---	---	----	-----	-----

稳态响应  $\rightarrow \infty$ 

$K_p$	$K$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	瞬态响应
-------	-----	----------	----------	----------	------

 $\rightarrow 0 \rightarrow$  稳定

$e_{ss}$	$\frac{1}{1+K}$	0	0	0
----------	-----------------	---	---	---

● 阶跃输入下  $e_{ss} = 0 \Leftrightarrow N \geq 1$ 。

●  $K_p$  反映了在阶跃输入下的稳态精度,  $K_p \uparrow, e_{ss} \downarrow$ 。



$$(2) \quad r(t) = tU(t)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v}$$

系统型

别 N            0            I            II            III            ...

$$K_v \quad \quad 0 \quad \quad K \quad \quad \infty \quad \quad \infty$$

$$e_{ss} \quad \quad \infty \quad \quad \frac{1}{K} \quad \quad 0 \quad \quad 0$$

● 斜坡输入下  $e_{ss} = 0 \Leftrightarrow N \geq 2$ 。

●  $K_v$  反映了在斜坡输入下的稳态精度,  $K_v \downarrow, e_{ss} \uparrow$ 。

$$(3) \quad r(t) = \frac{1}{2}t^2U(t)$$



$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

$$\bullet e_{ss} = 0 \Leftrightarrow N \geq 3。$$

## § 3.5 校正分析

——改善二阶系统响应特性的措施

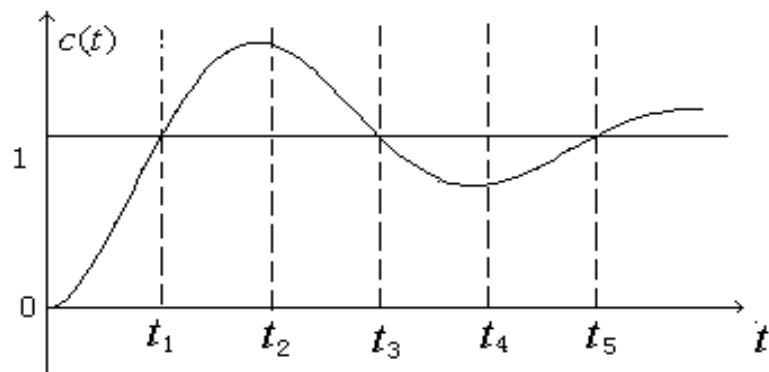
$$k = \omega_n^2, \quad \omega_n = \sqrt{K/T}, \quad \xi = 1 / (2\sqrt{KT})$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} / t_p = \frac{\pi}{\omega_d} / t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \sim \xi, \quad \omega_n$$

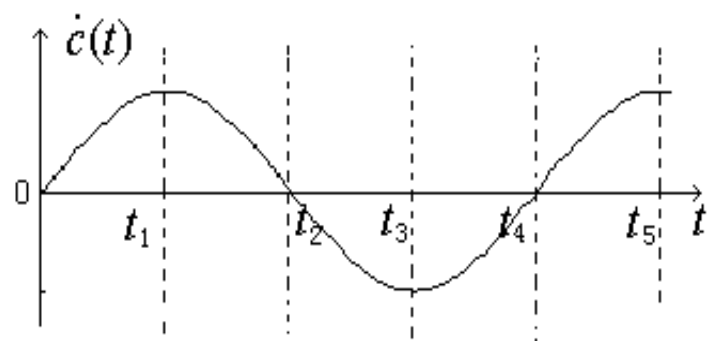
$$M_p = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% \sim \xi$$

当只调参数 $\xi$ ,  $\omega_n$ 不能满足性能指标时, 需要对系统进行校正。

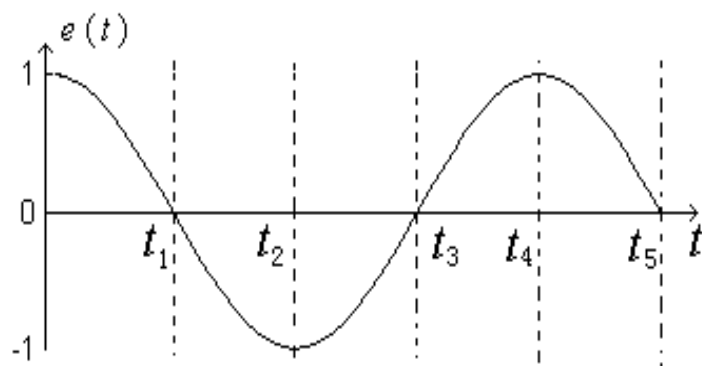




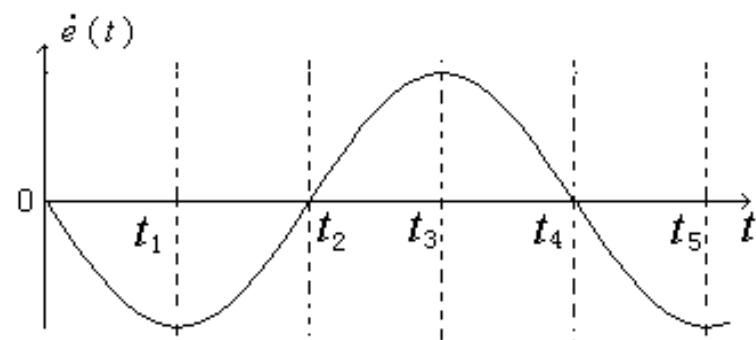
(a)



(b)



(c)



(d)



## 控制信号

### ● 造成过调的原因:

①  $[0 \sim t_1]$ 内, 正向修正过大

} 应附加负信号

②  $[t_1 \sim t_2]$ 内, 反向修正不足

### ● 造成振荡的原因

①  $[t_2 \sim t_3]$ 内, 反向修正过大

} 应附加正信号

②  $[t_3 \sim t_4]$ 内, 正向修正不足

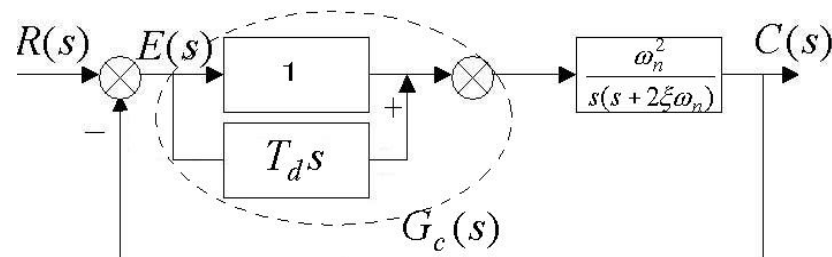
——可引入 $\dot{e}(t)$ 或 $-\dot{c}(t)$ 作为附加控制信号来改善平稳性。

#### (1) 误差信号的比例微分控制 (PD)

控制信号:  $e'(t) = e(t) + T_d \cdot \dot{e}(t)$

$$E'(s) = E(s)(1 + T_d s)$$

$T_d$ ——微分时间常数



$$\text{开环传函: } G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2(1 + T_d s)}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

$$\text{闭环传函: } T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(1 + T_d s)}{s^2 + (2\xi\omega_n + T_d\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

$$\text{等效阻尼比: } \xi_d = \xi + \frac{T_d\omega_n}{2} > \xi$$

## (2) 输出量的速度反馈

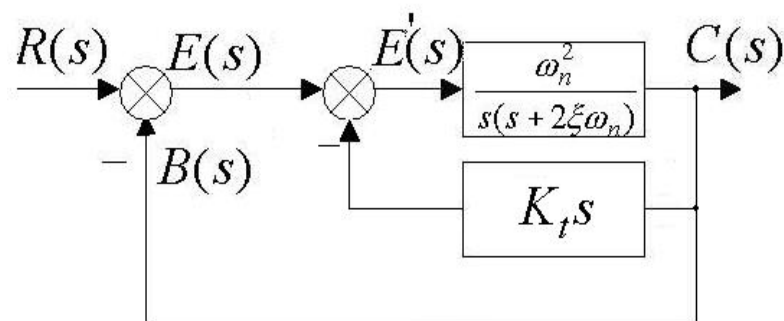
控制信号:

$$e'(t) = e(t) - K_t \cdot \dot{c}(t)$$

$$E'(s) = E(s) - K_t \cdot s \cdot C(s)$$

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\xi\omega_n + K_t\omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

$$\text{等效阻尼比: } \xi_t = \xi + \frac{K_t\omega_n}{2} > \xi$$



## 小结:

### 1. 典型控制过程及性能指标

典型的初态、输入、时间响应，性能指标。

### 2. 瞬态响应分析

一阶、二阶、高阶（三阶、二阶+零点、三阶）。

### 3. 稳态性分析

} 不必求解闭环特性方

### 4. 稳态误差分析

——2、3 需要知道闭环极点。

