

第二章 最优波束形成

§2.1 引言

◆ 空间滤波:

定向天线

波束形成器: 采用传感器阵（即空间采样离散）时所产生的空间滤波器

◆ 时间滤波与波束形成器:

FIR 滤波器: 对时域采样时间序列进行线性组合。

波束形成器: 对空间采样时间序列进行线性组合; 得到一个标量输出时间序列—阵列响应。

◆ 根据线性组合加权系数的选择方法, 波束形成器可分为:

确定性波束形成器:



目标是使波束指向处阵列响应为 1，其它方向阵列响应为 0。

权系数的幅度是根据期望的天线方向图或其特性预先设计的，用于控制方向图的形状；权系数的相位可以根据期望信号来向实时调整。

需要单路射频发射或接收链路。

统计最优波束形成器：

目标是使波束形成器的输出中包含尽可能少的噪声及期望信号方向以外的信号。

权系数是根据阵列接收数据的统计特性，按照使阵列响应最优而选择的。

对单元域波束形成需要 N 路射频发射或接收链路。

有限制的统计最优波束形成器：

将确定性波束形成器设计技术用于统计最优波束形成的设计中。

如线性限制最小方差波束形成中的约束设计。

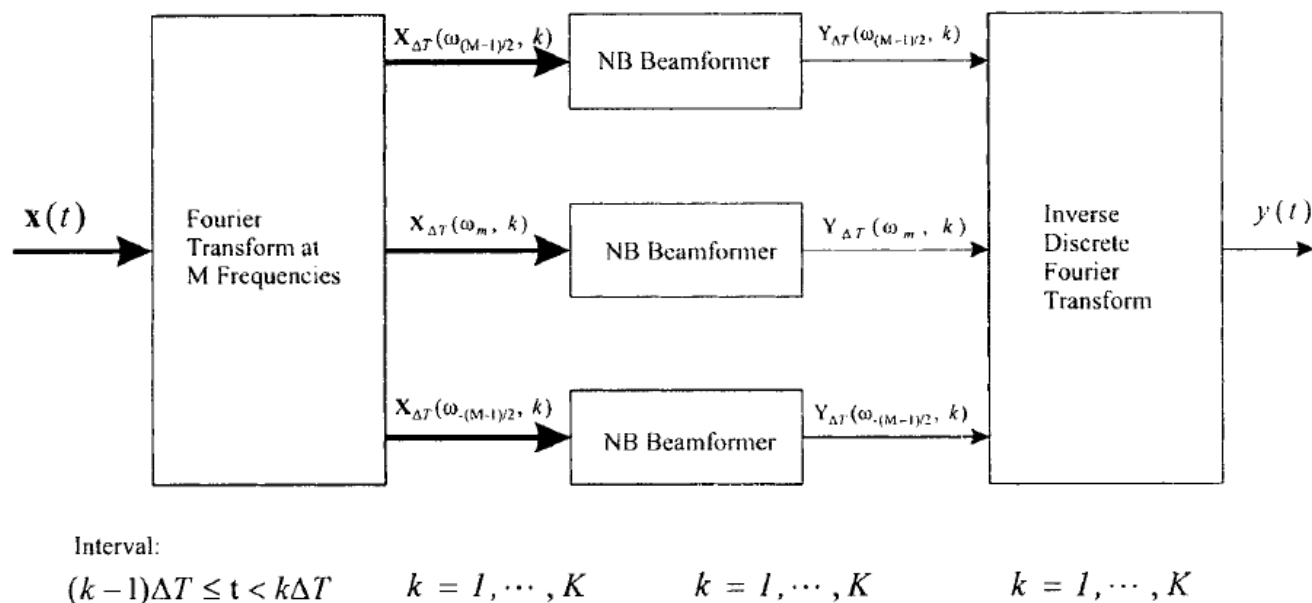
对单元域波束形成需要 $N - M$ 路发射或接收机， M 为所加的线性限制的个数。



§2.2 时空信号模型

一、快拍(Snapshot)模型

1. 频域快拍模型 —— 频域实现波束成形



设阵列在观测时间 $[0, T]$ 内接收到的信号 $\mathbf{x}(t)$ 是**宽带随机信号**，带宽为 B_s 。为了进行窄带阵列信号处理，把 $\mathbf{x}(t)$ 在频域上分成若干个频段 $B_s = M \cdot \omega_\Delta$ ，**使这些频段满足窄带条件**。



第一个处理器用于产生 M 个复向量进行波束成形，这些复向量被称为频域快拍。

为了生成频域快拍，把整个观测间隔 T 分为 K 个长度为 ΔT 的时间间隔：

$$0 \leq t < \Delta T, \quad \dots (k-1)\Delta T \leq t < k\Delta T \dots, \quad (K-1)\Delta T \leq t < K\Delta T$$

其中 ΔT 远远大于信号在阵列上传播的最大时延 $\tau_{\max} = L/c$, $\omega_{\Delta} = 2\pi / \Delta T$, $M = \lfloor B_s \cdot \Delta T \rfloor + 1$ 。

由于 $\Delta T \gg \tau_{\max}$ ，因此 $\omega_{\Delta} \ll 2\pi / \tau_{\max}$ ， $2\pi / \tau_{\max}$ 为阵列滤波器的带宽 \rightarrow 可见 ΔT 的选择是为了保证在各频段上的信号为窄带信号。

设 M 为奇数，对于阵列接收信号 $\mathbf{x}(t)$ 在这些时间间隔 ΔT 上进行如下的积分，可得到由在频率 $\omega_m = \omega_c + m\omega_{\Delta}$ 处的傅里叶级数组成的复向量：

$$\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta T}} \int_{(k-1)\Delta T}^{k\Delta T} \mathbf{x}(t) e^{-j(\omega_c + m\omega_{\Delta})t} dt, \quad m = -\frac{M-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad k = 1, \dots, K$$

即为频域快拍。

频域快拍的协方差矩阵为：



$$\begin{aligned}
S_{\mathbf{X}_{\Delta T}}(m_1, m_2) &= E\left\{\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_{m_1}, k)\mathbf{X}_{\Delta T}^H(\omega_{m_2}, k)\right\} \\
&= \frac{1}{\Delta T} \int_{(k-1)\Delta T}^{k\Delta T} \int_{(k-1)\Delta T}^{k\Delta T} R_x(t-u) e^{-j\omega_c(t-u)} e^{-jm_1\omega_\Delta t + jm_2\omega_\Delta u} dt du
\end{aligned}$$

→ $\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \{[S_{\mathbf{X}_{\Delta T}}(m, m)]_{nn}\} = [S_x(\omega_c + m\omega_\Delta)]_{nn} = [S_x(\omega_m)]_{nn}$ — 维纳-辛钦定理 ($B_s \cdot \Delta T \geq 16$ 时近似成立)

若信号 $\mathbf{x}(t)$ 为实高斯随机过程向量，则可以证明（见[3]pp343），在不同频率段 ω_m 和不同时间间隔 k 上的频域快拍 $\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k)$ 为联合循环复高斯向量，即：

$$\begin{aligned}
E\{\text{Re}[\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k)]\text{Re}[\mathbf{X}_{\Delta T}^T(\omega_m, k)]\} &= E\{\text{IM}[\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k)]\text{IM}[\mathbf{X}_{\Delta T}^T(\omega_m, k)]\}; \\
E\{\text{Re}[\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k)]\text{IM}[\mathbf{X}_{\Delta T}^T(\omega_m, k)]\} &= 0
\end{aligned}$$

也可以证明，不同的频点 m 和/或时间间隔 k 上的频域快拍统计独立。

此时，若进一步有 $B_s \cdot \Delta T \geq 16$ ，则：

$$S_{\mathbf{X}_{\Delta T}}(\omega_m, k) = E\{\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k)\mathbf{X}_{\Delta T}^T(\omega_m, k)\} \approx S_x(\omega_m) \text{——与时间无关}$$



若有一个平面波期望信号和 $D-1$ 个平面波干扰信号，则阵列接收信号的频域快拍为：

$$\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k) = \mathbf{v}(\omega_m, \mathbf{k}_s) F_{s, \Delta T}(\omega_m, k) + \sum_{i=1}^{D-1} \mathbf{v}(\omega_m, \mathbf{k}_i) F_{i, \Delta T}(\omega_m, k) + N_{\Delta T}(\omega_m, k)$$

$$m = -\frac{M-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad k = 1, \dots, K$$

定义 $N \times D$ 维阵簇矩阵：

$$V(\omega_m, \mathbf{k}) = [\mathbf{v}(\omega_m, \mathbf{k}_s) \quad \mathbf{v}(\omega_m, \mathbf{k}_1) \quad \cdots \quad \mathbf{v}(\omega_m, \mathbf{k}_{D-1})]$$

以及辐射源信号（确定性信号或随机过程）的频域快拍向量：

$$\mathbf{F}_{\Delta T}(\omega_m, k) = [F_{\Delta T, s}(\omega_m, k) \quad F_{\Delta T, 1}(\omega_m, k) \quad \cdots \quad F_{\Delta T, D-1}(\omega_m, k)]^T$$

则阵列接收信号的频域快拍向量可表示为：

$$\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k) = V(\omega_m, \mathbf{k}) \mathbf{F}_{\Delta T}(\omega_m, k) + \mathbf{N}_{\Delta T}(\omega_m, k)$$

其空间谱矩阵为（为简化表达，省略频率和波数）：

$$S_x = V \cdot S_f \cdot V^H + S_n$$



2. 时域快拍模型——时域实现波束成形

考虑单个窄带平面波信号。设在阵列原点处接收的信号为带宽为 B_s 的实带通信号：

$$f(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\tilde{f}(t)e^{j\omega_c t}\}$$

则在第 n 个阵元的信号为：
$$f_n(t) = f(t - \tau_n) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\tilde{f}(t - \tau_n)e^{j\omega_c(t - \tau_n)}\}$$

窄带假设意味着 $\tilde{f}_n(t) = \tilde{f}(t - \tau_n)$ ，因此：
$$f_n(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\tilde{f}(t)e^{-j\omega_c \tau_n} e^{j\omega_c t}\}$$

各传感器单元正交解调器输出为：

$$\tilde{f}_n(t) = \tilde{f}(t)e^{-j\omega_c \tau_n}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{f}}(t) = \tilde{f}(t)\mathbf{v}(\mathbf{k})$$

故阵列接收信号为：
$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{f}(t)\mathbf{v}(\mathbf{k}) + \mathbf{n}(t)$$

对 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ 以 $1/B_s$ 进行采样，即可得到阵列接收信号的时域快拍模型：

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \tilde{f}(k)\mathbf{v}(\mathbf{k}) + \mathbf{n}(k), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

对于一个平面波期望信号和 $D-1$ 个平面波干扰信号，上述时域快拍模型可推广为：

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = V(\mathbf{k})\mathbf{f}(k) + \mathbf{n}(k) \quad \rightarrow \quad \text{其空间相关矩阵为：} R_{\mathbf{x}} = V \cdot R_{\mathbf{f}} \cdot V^H + R_{\mathbf{n}}$$



二、 时空随机过程

设时空信号 $f(t, \mathbf{p})$ 是一个零均值复随机过程，则可定义时空协方差为：

$$K_f(t_1, t_2 : \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = E\{f(t_1, \mathbf{p}_1)f^*(t_2, \mathbf{p}_2)\}$$

若 $f(t, \mathbf{p})$ 为时空平稳随机过程，则：

$$K_f(t_1, t_2 : \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}), \quad \tau = t_1 - t_2, \quad \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$$

定义时频谱-空间相关函数：

$$S_f(\omega : \Delta \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

以及时间相关-空间波数谱为：

$$F_f(\tau : \mathbf{k}) = \int \int_{\mathbb{R}^N} K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\mathbf{k}^T \Delta \mathbf{p}} d\Delta \mathbf{p} \xrightarrow{\text{3 dimensional space}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\mathbf{k}^T \Delta \mathbf{p}} d\Delta \mathbf{p}$$

对时空协方差进行二维复氏变换，可得频率-波数谱：



$$\begin{aligned}
P_f(\omega : \mathbf{k}) &= \int \cdot \int_{\mathbb{R}^L} S_f(\omega : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\mathbf{k}^T \Delta \mathbf{p}} d\Delta \mathbf{p} \xrightarrow{\text{3 dimensional space}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\mathbf{k}^T \Delta \mathbf{p}} d\Delta \mathbf{p} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) e^{-j(\omega\tau - \mathbf{k}^T \Delta \mathbf{p})} d\Delta \mathbf{p} d\tau
\end{aligned}$$

频率-波数谱的性质与标量过程的频谱类似。

特例 1: 对于平面波信号，上述空时信号具有如下形式：

$$f(t, \mathbf{p}) = f\left(t - \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}}{c}\right) = F(\omega) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}), \text{ 其中 } f(t) \text{ 是频谱为 } S_f(\omega) \text{ 的零均值平稳随机过程。}$$

则时空相关函数为：

$$K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) = K_f\left(\tau - \frac{\mathbf{a}^T \Delta \mathbf{p}}{c}\right)$$

三维空间上的时频谱-空间相关函数为：

$$S_{3f}(\omega : \Delta \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\omega\tau} d\tau = S_f(\omega) e^{-j\left(\frac{\omega}{c}\right)(\mathbf{a}^T \Delta \mathbf{p})}$$



三维空间上的频率-波数谱为:

$$P_f(\omega : \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\mathbf{k}^T \Delta \mathbf{p}} d\Delta \mathbf{p}$$

$$= S_f(\omega) \delta(\mathbf{k} - \frac{\omega}{c} \mathbf{a}) = S_f(\omega) \delta(k_x - \frac{\omega}{c} a_x) \delta(k_y - \frac{\omega}{c} a_y) \delta(k_z - \frac{\omega}{c} a_z)$$

可见单个平面波信号的频率-波数谱为 δ 函数, 这对应于时间-频率域的单频信号。

利用时频谱-空间相关函数和频率-波数谱可以对空间扩展源信号进行描述。

特例 2: 考虑一个 N 个单元的均匀线阵, 假设空间扩展信号为单频窄带信号, 其来向以阵列法向为中心, 在 u 域内均匀扩展, 即其频率-波数谱为:

$$P_f(\omega : u) = \begin{cases} \frac{\sigma_s^2}{u_\Delta}, & |u| \leq \frac{u_\Delta}{2} \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

则其时频谱-空间相关函数为:

$$[S_f(\omega : \Delta p)]_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} P_f(\omega : \mathbf{k}) e^{j\mathbf{k}^T \Delta \mathbf{p}} d\Delta \mathbf{p} = \frac{\sigma_s^2}{u_\Delta} \int_{-u_\Delta/2}^{u_\Delta/2} e^{-j(n-m)\pi u} du = \sigma_s^2 \text{sinc} \left[(n-m) \frac{\pi u_\Delta}{2} \right]$$



特例 3: 考虑一个 N 个单元的均匀线阵, 假设平面波信号为带限窄带信号, 其频谱在 B_s 内为常数, 即信号频谱为:

$$S_f(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_s^2}{B_s}, & |f| \leq f_c + \frac{B_s}{2} \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

则其时频谱-空间相关函数为:

$$\begin{aligned} [S_f(\omega : \Delta p)]_{nm} &= \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{f(t_1, \mathbf{p}_1) f^*(t_2, \mathbf{p}_2)\} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-f_c-B_s/2}^{f_c+B_s/2} S_f(f) e^{j\omega\tau} e^{-j\omega\tau} df d\tau \\ &= \frac{\sigma_s^2}{B_s} \int_{-f_c-B_s/2}^{f_c+B_s/2} e^{-j(n-\frac{N-1}{2})\psi} e^{-j(m-\frac{N-1}{2})\psi} df = \sigma_s^2 \text{sinc}\left[(n-m) \frac{\pi B_s u_s}{2f_c}\right] \end{aligned}$$

可见当 $B_s u_s / f_c = u_\Delta$ 时, 单频窄带空间扩展信号与带限窄带平面波信号的时频谱-空间相关函数具有相同的表达式。这种在空间扩展和频率扩展上的对偶性只对线阵成立。



三、特征值的物理意义

● 复习：随机过程 $x(t)$ 的 K-L 展开

- 默塞尔定理 — $x(t)$ 的协方差函数 $K_x(t, u)$ 可展开为：

$$K_x(t, u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(t) \phi_i(u), \quad 0 \leq t, u \leq T$$

λ_j 为 $K_x(t, u)$ 的特征值， $\phi_j(u)$ 为其对应的特征函数。

比较：随机过程 $x(t)$ 的均方收敛级数展开 (l.i.m.: 级数展开表示式的误差均方值趋于 0)

$$x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N x_i \phi_i(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

- ⊕ 当 $m_i = E[x_i] = 0$ 时， $E[x_i^2] = \lambda_i$ ，即特征值表示 r. p. 沿坐标函数 $\phi_i(t)$ 的能量均值。
- ⊕ 对于平稳 r. p.，当用无限区域代替有限区间时，特征函数 $\phi(t)$ 与特征值 λ 的关系由下述积分方程描述：



$$\lambda \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(t-u) \phi(u) du$$

当特征函数是 $e^{j\omega t}$ 时, 特征值是特定 ω 处的功率谱密度:

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(t-u) e^{-j\omega(t-u)} du = S_x(\omega)$$

考虑频域快拍模型, 假设 $\mathbf{X}(\omega_m, k)$ 为统计独立复高斯随机向量序列, 其空间谱矩阵为 $S_x(\omega_m)$ 。

类似于对标量随机变量进行的卡亨南—洛维展开, 也可以对随机向量进行正交展开:

$$\mathbf{X}(\omega_m, k) = \sum_{i=1}^N x_i \Phi_i$$

其中 Φ_i 为正交矢量: $\Phi_i^H \Phi_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$; 展开系数 $x_i = \Phi_i^H \mathbf{X}(\omega_m, k)$, $i, j = 1, \dots, N$; 同时, Φ_i 要使得 $E[x_i x_j] = \lambda_i \cdot \delta_{ij}$, 即: $\Phi_i^H S_x(\omega_m) \Phi_j = \lambda_i \cdot \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$

上式也可写为: $\lambda_i \cdot \Phi_i = S_x(\omega_m) \Phi_i$, $i, j = 1, \dots, N$ —— 特征分解问题



例 考虑 N 个阵源构成的阵列，有两个波数分别为 \mathbf{k}_1 和 \mathbf{k}_2 的入射平面波信号，其频域快拍为 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ ，阵簇矢量分别为 $\mathbf{v}(\mathbf{k}_1)$ 和 $\mathbf{v}(\mathbf{k}_2)$ ，阵簇矩阵为 $V = [\mathbf{v}(\mathbf{k}_1) \quad \mathbf{v}(\mathbf{k}_2)]$ ，谱矩阵为：

$$S_f = \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ S_{21} & S_2 \end{bmatrix}$$

阵列接收频域快拍的谱矩阵为：

$$S_x = V \cdot S_f \cdot V^H$$

对谱矩阵进行特征分解，可得：

$$S_x = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi_i \Phi_i^H = U \Lambda U^H$$

其中 $U \triangleq [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_N]$ 为 $N \times N$ 维特征矢量矩阵，各特征矢量 $\Phi_i^H \Phi_j = \delta_{ij}$ ， $i, j = 1, \dots, N$ ， $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_N]$ 为由特征值组成的对角阵。

为了求解特征值，需要求解下面的矩阵方程： $\det[\lambda I - S_x] = 0$



在本例中，可得到非零特征值为：

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} N [S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \operatorname{Re}(\rho^* B_c^{12})] \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4S_1 S_2 (1 - |B_c^{12}|^2)(1 - |\rho|^2)}{[S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \operatorname{Re}(\rho^* B_c^{12})]^2}} \right]$$

其中 $\rho = \frac{S_{12}}{\sqrt{S_1 S_2}}$ 为信号的时间相关， $B_c^{mn} = B_c(\mathbf{k}_n : \mathbf{k}_m) = \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_m) \mathbf{v}(\mathbf{k}_n)}{N}$ 为信号的空间相关。

若两个信号时间不相关，则非零特征值为：

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} N [S_1 + S_2] \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4S_1 S_2 (1 - |B_c^{12}|^2)}{[S_1 + S_2]^2}} \right]$$

若两个信号等功率且时间不相关，则特征值为：

$$\lambda_{1,2} = N \cdot S_1 \cdot [1 \pm |B_c^{12}|]$$



若两个信号等功率且时间不相关，则对应的归一化特征向量为：

$$\Phi_{1,2} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}_1) \pm e^{-j\phi(B_c^{12})} \mathbf{v}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2N(1 - |B_c^{12}|)}}$$

- N 个特征向量构成了阵列接收信号空间的 N 个正交基。
- 两个阵簇矢量定义了一个两维子空间，包含了所有的信号能量——被称为**信号子空间**，其中每一个特征向量都可以由阵簇矢量的线性组合构成。

特例：

$B_c^{12} = 0 \rightarrow \Phi_1$ 和 Φ_2 是对阵簇矢量 $\mathbf{v}(\mathbf{k}_1)$ 和 $\mathbf{v}(\mathbf{k}_2)$ 的 45° 旋转，且 $\lambda_1 = \lambda_2$ 。



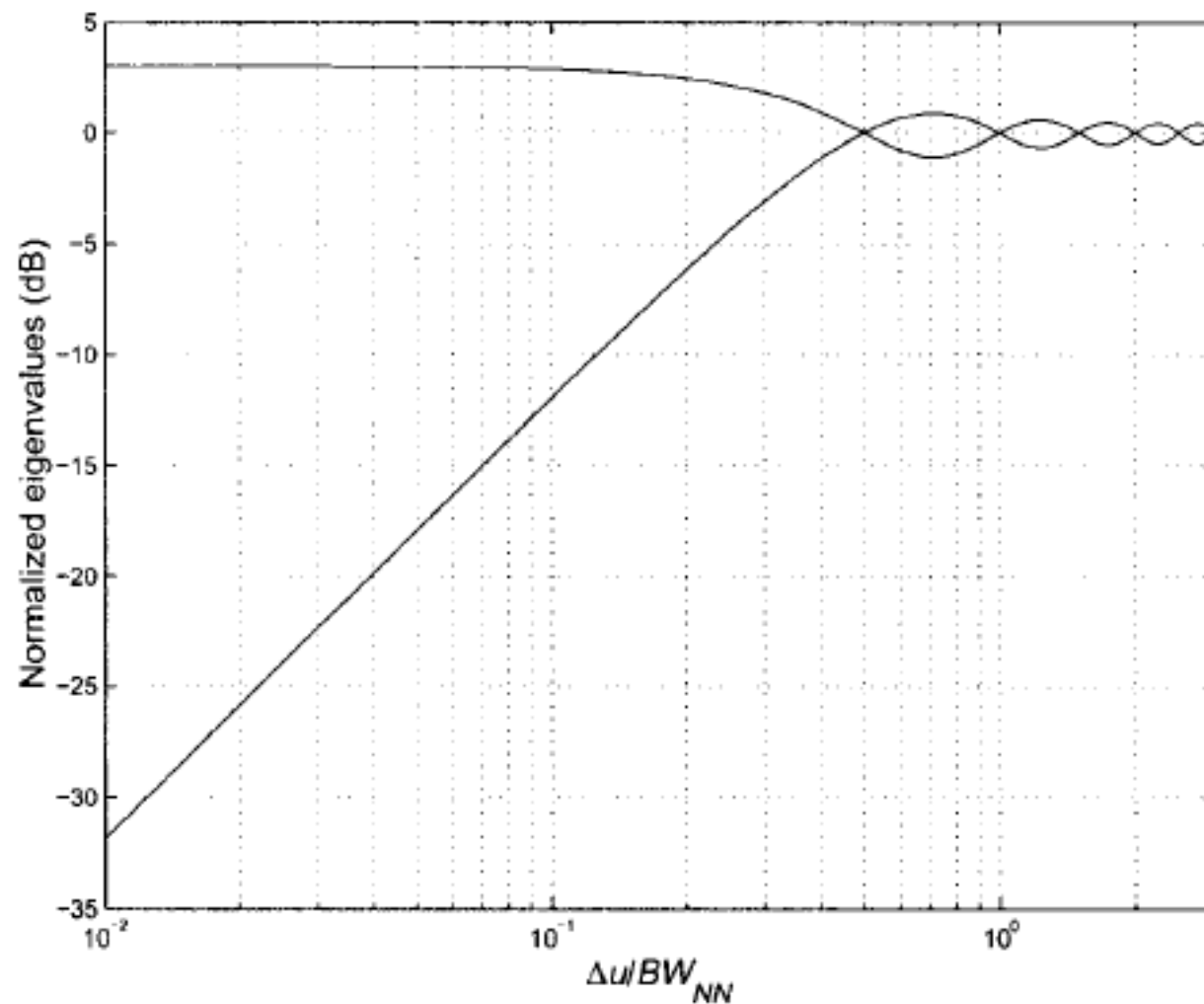


图 1([3]Fig. 5.10) 两个等功率时间不相关信号的归一化特征值 $\sim \Delta u / BW_{NN}$



四、方向性与阵列增益

定义功率方向图： $P(\theta, \phi) = |B(\omega; \theta, \phi)|^2$ ，则方向性为：

$$D = \frac{P(\theta_T, \phi_T)}{\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta \cdot P(\theta, \phi)}$$

在发射阵列中， D 表示最大辐射强度除以平均辐射强度（类似的概念：天线方向性—单位立体角中的辐射功率/单位立体角中的平均辐射功率；天线增益—单位立体角中的辐射功率/输入功率）。

在接收阵列中， D 可以视为针对各向同性空间噪声的阵列增益。→ see later

不失一般地，假设 $P(\theta_T, \phi_T) = 1$ ，则方向性可简化为：

$$D = \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta \cdot P(\theta, \phi) \right\}^{-1}$$

对于线阵，方向性可进一步简化为：



$$D = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\pi |B(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \right\}^{-1} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |B_u(u)|^2 du \right\}^{-1}$$

考虑均匀线阵的天线方向图与加权函数的关系：

$$B(\theta) = e^{-j \frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n^* e^{jn \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

若 $d = 0.5\lambda$ ，则用加权函数表示的方向性为：

$$D = \mathbf{w}_s^H [\text{sinc}] \mathbf{w}_s = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w_m w_n^* e^{j\pi(m-n)u_T} \text{sinc}(\pi(n-m)) \right\}$$

根据 sinc 函数的特点 $\rightarrow m=n$ 时为 1，否则为 0，故：

$$D = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |w_n|^2 \right\}^{-1} = (\mathbf{w}^H \mathbf{w})^{-2} = \{\|\mathbf{w}\|^2\}^{-1}$$

对于均匀加权均匀线阵，可以计算出： $\sum_{n=0}^{N-1} |w_n|^2 = \frac{1}{N}$ 。所以：

$D = N \rightarrow$ 根据施瓦兹不等式可以证明： $D \leq N \rightarrow$ 对于空间不相关噪声，均匀加权最优！



在接收阵列中 D 的解释：针对各向同性空间噪声的阵列增益——

对于平面波信号 $f(t)$ ，传感器阵列的第 n 个单元接收的信号为：

$$x_n(t) = f(t - \tau_n) + n_n(t)$$

其中 $n_n(t)$ 为第 n 个单元的接收机热噪声，假设各传感器单元上的噪声不相关，即为空间白噪声。

在每个传感器单元上，在频率 ω 处的输入信号功率谱与噪声功率谱之比为：

$$SNR_{in}(\omega) \triangleq \frac{S_f(\omega)}{S_n(\omega)}$$

假设传感器单元上接收的信号为宽平稳随机过程，则经过阵列加权后波束形成器的输出信号 $y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$ 的功率谱为：

$$S_y(\omega) = \mathbf{w}^H \mathbf{S}_x(\omega) \mathbf{w}$$

若不考虑接收机热噪声，则传感器单元接收信号的功率谱为：

$$\mathbf{S}_f(\omega) = \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s) S_f(\omega) \mathbf{v}_k^H(\mathbf{k}_s)$$

所以，源信号经过无失真波束形成器（ $\mathbf{W}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) = 1$ ）后输出信号的功率谱为：



$$S_{y_s}(\omega) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s) S_f(\omega) \mathbf{v}_k^H(\mathbf{k}_s) \mathbf{w} = S_f(\omega)$$

接收机热噪声经过波束形成器后输出信号的功率谱为：

$$S_{y_n}(\omega) = \mathbf{w}^H \mathbf{S}_n(\omega) \mathbf{w}$$

由于阵列的接收噪声为空间白噪声，所以：

$$\mathbf{S}_n(\omega) = S_n(\omega) \mathbf{I}$$

$$\text{故： } S_{y_n}(\omega) = \|\mathbf{w}\|^2 S_n(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} |w_n|^2 S_n(\omega)$$

则在频率 ω 处波束形成器的输出信号功率谱与噪声功率谱之比为：

$$SNR_o(\omega) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} |w_n|^2} \frac{S_f(\omega)}{S_n(\omega)}$$

即 **阵列增益**——波束形成器的输出信噪比与单个传感器输入信噪比之比为：

$$A_\omega = \frac{SNR_o(\omega)}{SNR_{in}(\omega)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} |w_n|^2} = \|\mathbf{w}\|^{-2}$$



§2.3 最佳波束形成器

最佳波束形成器的目的是估计信号波形——波形估计问题。

在下面的各节中，我们考虑前面介绍的**频域快拍模型 — 复习：**

假设阵列处理器的输入是统计独立的循环复高斯随机矢量：

$$\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k), \quad m = -\frac{M-1}{2}, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad k = 1, \dots, K。$$

由于不同频率段的频域快拍 $\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_{m1}, k)$ 与 $\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_{m2}, k)$ 是统计独立的，此时每个频段的窄带波束形成器是解耦的，故 $\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k) \rightarrow \mathbf{X}_{\Delta T}(\omega, k)$ 。

本章**假设阵列处理器输入信号的空间谱 $S_x(\omega)$ 或空间相关函数 $R_x(\tau)$ 、或者 $S_n(\omega)$ 已知**，且对每个快拍都是相同的，故 $\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega, k) \rightarrow \mathbf{X}_{\Delta T}(\omega)$ 。

当满足 $B_s \cdot \Delta T \geq 16$ 时，进一步有 $\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega) \rightarrow \mathbf{X}(\omega)$ 。

考虑 N 个单元组成的阵列，其输入为空时随机过程 $x(t, \mathbf{p})$ ，则在没有传感器噪声时，阵列的输出为：



$$x(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(t, \mathbf{p}_0) \\ \vdots \\ x(t, \mathbf{p}_{N-1}) \end{bmatrix}, \text{ 窄带特性 } \rightarrow X_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau_n) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \tau_n} \cdot X(\omega)$$

其中 \mathbf{p}_i 表示第 i 个单元的位置。

当 $B_s \cdot \Delta T \geq 16$ 时, 维纳-辛钦定理近似成立, 则频域快拍的协方差函数为:

$$S_{\mathbf{X}_{\Delta T}}(\omega_m, k) = E\{\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k) \mathbf{X}_{\Delta T}^T(\omega_m, k)\} \approx S_{\mathbf{X}}(\omega_m) \xrightarrow{\text{独立频域快拍}} S_{\mathbf{X}}(\omega)$$

即为空时随机过程 $x(t, \mathbf{p})$ 的空间谱矩阵。空间谱矩阵的第 ij 个元素为:

$$[S_{\mathbf{X}}(\omega)]_{ij} = S_x(\omega : \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \xrightarrow{\text{三维空间, 平面波信号}} S_{3f}(\omega : \Delta \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) e^{-j\omega \tau} d\tau = S_f(\omega) e^{-j\left(\frac{\omega}{c}\right)(\mathbf{a}^T \Delta \mathbf{p})}$$

其中 $S_x(\omega : \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$ 为时频谱-空间相关函数。

在后面的讨论中, 当采用 **频域快拍模型** 得到最优波束形成器时将利用 **空间谱矩阵** $S_{\mathbf{X}}(\omega)$ 。若采用 **时域快拍模型** 得到最优波束形成器, 我们将利用 **空间相关矩阵** $R_{\mathbf{X}}(\tau) = K_f(\tau : \Delta \mathbf{p}) \xleftarrow{\text{复氏变换}} S_{\mathbf{X}}(\omega)$ 。



一、最小方差/功率无失真波束形成器 (MVDR/MPDR)

假设期望信号是未知的单个平面波信号，波数为 \mathbf{k}_s ，则信号加噪声的频域快拍为：

$$\mathbf{X}(\omega) = F(\omega)\mathbf{v}(\omega:\mathbf{k}_s) + \mathbf{N}(\omega)$$

其中 $F(\omega)$ 是源信号的频域快拍， $\mathbf{v}(\omega:\mathbf{k}_s)$ 是波数为 \mathbf{k}_s 的平面波信号的阵簇矢量， $\mathbf{N}(\omega)$ 为具有空间谱矩阵 $\mathbf{S}_n(\omega)$ 的零均值随机矢量。

1. 最小方差无失真 (MVDR: Minimum Variance Distortionless Response) 波束形成器

若期望信号及其统计特性均未知，则一种接收性能良好的波束形成器，是在保证信号无失真传输的情况下使输出噪声方差或输出噪声功率最小。假设已知 $\mathbf{v}(\omega:\mathbf{k}_s)$ 及 $\mathbf{S}_n(\omega)$ 。

信号无失真意味着在没有噪声时，阵列处理器的输出 $Y(\omega) = \mathbf{w}^H(\omega)\mathbf{X}(\omega) = F(\omega)$ 。即满足 $\mathbf{w}^H(\omega)\mathbf{v}(\omega,\mathbf{k}_s) = 1$ 。

在有噪声的情况下，最小方差无失真波束形成器使阵列处理器输出 $Y(\omega) = F(\omega) + Y_n(\omega)$ 的方差最小，即使 $E[|Y_n(\omega)|^2] = \mathbf{w}^H(\omega)\mathbf{S}_n(\omega)\mathbf{w}(\omega)$ 最小。



MVDR 波束形成器的最优准则为:

$$\min_{\mathbf{w}} \text{Var}\{Y(\omega)\} = \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H(\omega) S_{\mathbf{n}}(\omega) \mathbf{w}(\omega), \quad s.t. \quad \mathbf{w}^H(\omega) \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_s) = 1$$

其中 $S_{\mathbf{n}}(\omega) = E\{\mathbf{N}(\omega)\mathbf{N}^H(\omega)\}$ 。

利用拉格朗日乘子方法求解上述限制最优化问题，有：

$$\nabla \mathbf{w}^H (\mathbf{w}^H S_{\mathbf{n}} \mathbf{w} + \lambda [\mathbf{w}^H \mathbf{v} - 1] + \lambda^* [\mathbf{v}^H \mathbf{w} - 1]) = 0$$

$$\mathbf{w}_{MVDR}(\omega) = \Lambda(\omega, \mathbf{k}_s) \cdot S_{\mathbf{n}}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_s)$$

其中 $\Lambda(\omega) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\omega, \mathbf{k}_s) \cdot S_{\mathbf{n}}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_s)}$ 。

实际上，上述目标函数也等价于最小方差无偏估计准则。即 $E\{Y(\omega)\} = F(\omega)$ 。此等式也意味着无失真条件 $\mathbf{w}^H(\omega) \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_s) = 1$ 。

若进一步假设噪声 $\mathbf{N}(\omega)$ 为具有谱矩阵 $S_{\mathbf{n}}(\omega)$ 的零均值循环复高斯随机矢量，则可以得到似然函数为：

$$L(\omega) = [\mathbf{X}^H(\omega) - F^*(\omega) \mathbf{v}^H(\omega, \mathbf{k}_s)] \cdot S_{\mathbf{n}}^{-1}(\omega) \cdot [\mathbf{X}(\omega) - F(\omega) \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_s)]$$



令 $\nabla L(\omega) / \nabla F^*(\omega) = 0$ ，则期望信号的极大似然估计为：

$$\hat{\mathbf{F}}(\omega) = \frac{\mathbf{v}^H(\omega, \mathbf{k}_s) \cdot S_{\mathbf{n}}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{X}(\omega)}{\mathbf{v}^H(\omega, \mathbf{k}_s) \cdot S_{\mathbf{n}}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_s)}$$

此式等于 MVDR 处理器的输出。可见：**MVDR 处理器** \Leftrightarrow **最小方差无偏估计** \Leftrightarrow **极大似然估计**

2. 最小功率无失真 (MPDR: Minimum Power Distortionless Response) 波束形成器

假设已知空间谱矩阵 $S_{\mathbf{x}}(\omega)$ ，以及波数为 \mathbf{k}_m 的平面波信号的阵簇矢量——定向矢量 $\mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_m)$ 。最小功率无失真波束形成器在对波数为 \mathbf{k}_m 的平面波信号完全匹配的约束下使阵列输出 $Y(\omega) = \mathbf{w}^H(\omega) \mathbf{X}(\omega)$ 的总功率最小，即使 $E[|Y(\omega)|^2] = \mathbf{w}^H(\omega) S_{\mathbf{x}}(\omega) \mathbf{w}(\omega)$ 最小。

MPDR 波束形成器的最优准则为：

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H(\omega) S_{\mathbf{x}}(\omega) \mathbf{w}(\omega), \quad s.t. \quad \mathbf{w}^H(\omega) \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_m) = 1$$

同样利用拉格朗日乘子方法可得最小功率无失真波束形成器的权系数为：



$$\mathbf{w}_{MPDR}(\omega) = \Lambda(\omega, \mathbf{k}_s) \cdot S_{\mathbf{x}}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_m), \quad \text{其中} \quad \Lambda(\omega) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\omega, \mathbf{k}_m) \cdot S_{\mathbf{x}}^{-1}(\omega) \cdot \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_m)}。$$

若 $\mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_m) = \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_s)$ ，则不难证明 $\mathbf{w}_{MPDR} = \mathbf{w}_{MVDR}$ 。

二、最小均方误差波束形成器

假设期望信号是单个平面波随机信号，波数为 \mathbf{k}_s ，则信号加噪声的频域快拍为：

$$\mathbf{X}(\omega) = F(\omega) \mathbf{v}(\omega : \mathbf{k}_s) + \mathbf{N}(\omega)$$

其中 $F(\omega)$ 是源信号的频域快拍，为零均值方差为 $S_f(\omega)$ 的随机变量， $\mathbf{v}(\omega : \mathbf{k}_s)$ 是波数为 \mathbf{k}_s 的平面波信号的阵簇矢量， $\mathbf{N}(\omega)$ 为具有谱矩阵 $S_{\mathbf{n}}(\omega)$ 的零均值随机矢量，假设每个传感器上的噪声具有同样的统计特性。信号与噪声不相关。

$\mathbf{X}(\omega)$ 的谱矩阵为：

$$S_{\mathbf{x}}(\omega) = S_f(\omega) \mathbf{v}(\omega : \mathbf{k}_s) \mathbf{v}^H(\omega : \mathbf{k}_s) + S_{\mathbf{n}}(\omega)$$

对于窄带信号，上述频域快拍模型亦可以用其时域快拍模型 $\mathbf{x}(t) = f(t) \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + \mathbf{n}(t)$ 表示，波束形成器的输出响应为：



$$y(t) = \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{x}(t)$$

在许多应用场合知道 $f(t)$ 的很多特征, 可以构造/生成一个与 $f(t)$ 足够相似、或至少与 $f(t)$ 相关到一定程度的信号 $d(t)$ —— 作为参考信号, 来表示期望信号 $f(t)$ 。

假设已知期望的响应 $d(t)$, 则我们可以设计一个波束形成器, 使其输出与参考信号响应之间的均方误差最小, 此即最小均方误差波束形成器。

$$\min_{\mathbf{w}} E\{e^2(t)\} = \min_{\mathbf{w}} E\left\{\left[d^*(t) - \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)\right]^2\right\}$$

而
$$E\{e^2(t)\} = E\{d^2(t)\} - 2\mathbf{w}^H R_{dx} + \mathbf{w}^H R_x \mathbf{w}$$

其中 $R_{dx} = E\{d^*(t)\mathbf{x}(t)\}$, $R_x = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\}$ 。

求对上式的梯度, 并令之为 0, 有

$$\nabla_{\mathbf{w}^H} [E\{e^2(t)\}] = -2R_{dx}^H + 2\mathbf{w}^H \cdot R_x = 0$$

$$\therefore \mathbf{w}_{\text{MSE}}^H = R_{dx}^H R_x^{-1} \quad \text{—— 此即维纳-霍夫方程的解}$$



若 $f(t) = d^*(t)$, 则:

$$R_{d\mathbf{x}^H} = E\{d^*(t)\mathbf{x}^H(t)\} = E\{d^2(t)\}\mathbf{v}_s^H$$

$$R_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = E\{d^2(t)\}\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s^H + R_{\mathbf{n}}, \quad R_{\mathbf{n}} = E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\}$$

$$\rightarrow R_{\mathbf{x}}^{-1} = \frac{1}{1 + E\{d^2(t)\mathbf{v}_s^H R_{\mathbf{x}} \mathbf{v}_s\}} R_{\mathbf{n}}^{-1}$$

此时最小均方误差波束形成器的权系数向量为:

$$\mathbf{w}_{\text{MMSE}}^H = \Lambda \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_{\mathbf{n}}^{-1},$$

其中 $\Lambda = \frac{E\{d^2(t)\}}{1 + E\{d^2(t)\mathbf{v}_s^H R_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_s\}} \circ$

从频域快拍模型不难得出相应的频域形式权系数为:

$$\mathbf{w}_{\text{MMSE}} = \frac{S_f}{S_f + \Lambda \cdot I} \cdot \Lambda \cdot S_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \text{其中 } \Lambda^{-1} = \mathbf{v}_s^H S_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_s$$



三、最大信干比波束形成器

设传感器阵接收的数据是宽平稳的，窄带期望信号与干扰不相关。

假设已知信号和噪声的二阶统计量：

$$R_f = E\{\mathbf{f}\mathbf{f}^H\}, \quad R_n = E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\}$$

传感器阵输出为：

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N w_n^* x_n$$

则输出信号功率可以写为：

$$\sigma_s^2 = E\{|\mathbf{w}^H \mathbf{f}|^2\} = \mathbf{w}^H R_f \mathbf{w}$$

输出干扰功率为：

$$\sigma_n^2 = E\{|\mathbf{w}^H \mathbf{n}|^2\} = \mathbf{w}^H R_n \mathbf{w}$$

则输出信号干扰比为：



$$SIR = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} = \frac{\mathbf{w}^H R_f \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H R_n \mathbf{w}}$$

这种波束形成器的最优准则为:

$$\max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^H R_f \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H R_n \mathbf{w}}$$

$$\text{令 } \frac{dSIR}{d\mathbf{w}} = 0, \text{ 有:}$$

$$R_f \mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}^H R_f \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H R_n \mathbf{w}} \cdot R_n \cdot \mathbf{w} \quad \rightarrow \quad R_n^{-1} \cdot R_f \cdot \mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}^H R_f \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H R_n \mathbf{w}} \cdot \mathbf{w}$$

从上式中求解 \mathbf{w} 是个广义特征值问题。对称矩阵 $R_n^{-1} R_f$ 的最大特征值即为最大的 SIR，即：

$$R_n^{-1} \cdot R_f \mathbf{w} = \lambda_{\max} \cdot \mathbf{w}$$

而与 λ_{\max} 相对应的特征向量即使 SIR 最大的最优权系数：

$$R_f \cdot \mathbf{w}_{SIR} = SIR \cdot R_n \cdot \mathbf{w}_{SIR}$$



这种波束形成器的优点是其输出确实保证 SIR 最大，但必须已知信号和噪声/干扰的二阶统计特性，且在求解权系数时需求解广义特征值问题。

对于单个平面波期望信号，由于 $R_f = E\{f^2(t)\} \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s^H$ ，有：

$$\mathbf{w}_{SIR} = \Lambda \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s; \text{ 其中 } \Lambda = \frac{E\{f^2(t)\}}{SIR} \cdot \mathbf{v}_s^H \mathbf{w}_{SIR} \circ$$

四、离散干扰源下的最优波束形成器

假设期望信号是未知的单个平面波信号，波数为 \mathbf{k}_s ，考虑一个平面波干扰信号源，波数为 \mathbf{k}_1 ，则信号加干扰和噪声的频域快拍为：

$$\mathbf{X}(\omega) = F(\omega) \mathbf{v}(\omega: \mathbf{k}_s) + F_{M1}(\omega) \mathbf{v}(\omega: \mathbf{k}_1) + \mathbf{N}(\omega)$$

其中 $F(\omega)$ 和 $F_{M1}(\omega)$ 分别是期望源信号和干扰信号的频域快拍， $\mathbf{v}(\omega: \mathbf{k}_s)$ 和 $\mathbf{v}(\omega: \mathbf{k}_1)$ 分别是平面波期望信号和干扰信号的阵簇矢量， $\mathbf{N}(\omega)$ 为零均值随机矢量，每个随机变量为方差为 σ_w^2 的白噪声。

下面以 MVDR 波束形成器为例，分析在有一个平面波干扰信号源时的最优波束形成器。



MVDR 准则：信号无失真，干扰与噪声对滤波器输出影响最小。

干扰与噪声谱矩阵为：

$$S_n(\omega) = \sigma_w^2 \mathbf{I} + M_1(\omega) \mathbf{v}(\omega : \mathbf{k}_1) \mathbf{v}^H(\omega : \mathbf{k}_1) \rightarrow S_n = \sigma_w^2 \mathbf{I} + M_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^H$$

其中 $M_1(\omega)$ 为干扰信号的功率谱（以下略去频率、信号和噪声谱亦然）。

由矩阵求逆引理，可得：

$$S_n^{-1} = \frac{1}{\sigma_w^2} \left[\mathbf{I} - \frac{M_1}{\sigma_w^2 + NM_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^H \right]$$

因此可得 MVDR 波束形成器的权值为：

$$\mathbf{w}_{MVDR}^H = \frac{\Lambda}{\sigma_w^2} \mathbf{v}_s^H \cdot \left[\mathbf{I} - \frac{M_1}{\sigma_w^2 + NM_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^H \right]$$

定义 $\rho_{s1} = \frac{\mathbf{v}_s^H \mathbf{v}_1}{N}$ 为期望信号与干扰信号之间的空间相关系数，注意 $\rho_{s1} = B_c(\mathbf{k}_1 : \mathbf{k}_s)$ 为指向

信号波数 \mathbf{k}_s 的传统天线方向图在干扰波数 \mathbf{k}_1 处的值。则上述最优权值为：



$$\mathbf{w}_{MVDR}^H = \frac{\Lambda N}{\sigma_w^2} \cdot \left[\frac{\mathbf{v}_s^H}{N} - \rho_{s1} \frac{NM_1}{\sigma_w^2 + NM_1} \frac{\mathbf{v}_1^H}{N} \right]$$

其中归一化系数为 $\Lambda = \left\{ \frac{N}{\sigma_w^2} \cdot \left[1 - |\rho_{s1}|^2 \frac{NM_1}{\sigma_w^2 + NM_1} \right] \right\}^{-1}$ 。

可见最优权值由两部分组成，分别对应于期望信号和干扰信号——为指向期望信号和干扰信号的传统波束形成器。

令 $M_1 = S_f$, $S_n = \sigma_w^2 \mathbf{I}$, $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_1$, 则根据 $\mathbf{w}_{MMSE}^H = \frac{S_f}{S_f + \Lambda} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{v}_s^H S_n^{-1}$ 及 $\Lambda^{-1} = \mathbf{v}_s^H S_n^{-1} \mathbf{v}_s$

有: $\Lambda^{-1} = \frac{\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_1}{\sigma_w^2} \Rightarrow \mathbf{w}_{MSE} = \frac{NM_1}{NM_1 + \sigma_w^2} \cdot \sigma_w^2 \cdot \frac{\mathbf{v}_1^H}{\sigma_w^2} = \frac{NM_1}{NM_1 + \sigma_w^2} \cdot \mathbf{v}_1^H$

即 \mathbf{w}_{MVDR}^H 中括号中的第二项 $\rho_{s1} \frac{NM_1}{\sigma_w^2 + NM_1} \mathbf{v}_1^H$ 是干扰信号的最小均方误差估计与期望信号和干

扰信号的空间相关之间的乘积，可见在有单个平面波干扰时，MVDR 波束形成器是**指向期望信号的传统波束形成器****减去**干扰信号的最小均方误差估计与空间相关的乘积 → **GSC 原理!**



若信号与干扰能量相等，且远大于噪声能量， $NM_1 = NS_f \gg \sigma_w^2$ ，则 MVDR 波束形成器为：

$$\mathbf{w}_{MVDR}^H = \frac{\Lambda}{\sigma_w^2} \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot \left[\mathbf{I} - \mathbf{v}_1 [\mathbf{v}_1^H \mathbf{v}_1]^{-1} \mathbf{v}_1^H \right] = \frac{\Lambda}{\sigma_w^2} \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot \mathbf{P}_I^\perp$$

其中 \mathbf{P}_I^\perp 为投影到与干扰空间正交的子空间的投影矩阵。此时波束形成器在干扰信号方向产生一个零陷。

此时的阵列增益（**注意与天线方向性 D 的区别**）一波束形成器的**输出信干比/输入信干比**为：

$$A_{MVDR} = \frac{S_{y_s}}{S_{y_n}} \bigg/ \frac{S_f}{S_n} = N \left(1 + \frac{M_1}{\sigma_w^2} \right) \cdot \left[1 - |\rho_{s1}|^2 \frac{NM_1}{\sigma_w^2 + NM_1} \right]$$

由于 $N \frac{M_1}{\sigma_w^2} = N \cdot INR$ 很大，故上述阵列增益可近似为：

$$A_{MVDR} = N \left(1 + \frac{M_1}{\sigma_w^2} \right) \cdot [1 - |\rho_{s1}|^2]$$

可见，只要 $|\rho_{s1}| \neq 1$ ，对于很大的干扰，阵列增益可达到很大的值。若 $|\rho_{s1}| = 1$ ，则不难导出阵列增益为：



$$A_{MVDR} = N \left(\frac{1 + INR}{1 + N \cdot INR} \right) \xrightarrow{INR \rightarrow \infty} 1$$

从以上的分析可见, 当 INR 较大时, 最佳波束形成器在干扰信号方向形成凹口(部分零陷); 当 $INR \rightarrow \infty$ 时, 最佳波束形成器将在干扰信号方向形成理想零陷。当干扰方向在主瓣之外时, 天线方向图的形状比较理想, 可以得到很大的阵列增益; 但当干扰方向在主瓣之内时, 主瓣将偏移、旁瓣升高, 引起阵列增益的降低。极限情况下, 干扰与信号方向相同, $|\rho_{s1}|=1$, 此时阵列没有增益。可见主瓣干扰是一个非常难以解决的问题。

以上结论也适用于多个离散平面波干扰信号源。此时信号加干扰和噪声的频域快拍为:

$$\mathbf{X}(\omega) = F(\omega)\mathbf{v}(\omega: \mathbf{k}_s) + \sum_{i=1}^D F_{Mi}(\omega)\mathbf{v}(\omega: \mathbf{k}_i) + \mathbf{N}(\omega)$$

定义 $N \times D$ 维干扰源阵簇矩阵:

$$\mathbf{V}_I = [\mathbf{v}(\mathbf{k}_1) \mid \mathbf{v}(\mathbf{k}_2) \mid \cdots \mid \mathbf{v}(\mathbf{k}_D)]$$

则可导出 MVDR 波束形成器的权系数为:



$$\mathbf{w}_{MVDR}^H = \frac{\Lambda N}{\sigma_w^2} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{v}_s^H}{N} - \boldsymbol{\rho}_{sI} \left[\mathbf{I} + \frac{S_I}{\sigma_w^2} V_I^H V_I \right]^{-1} \frac{S_I}{\sigma_w^2} V_I^H \right\}$$

其中归一化系数为 $\Lambda = \left\{ \frac{N}{\sigma_w^2} \cdot \left[1 - \boldsymbol{\rho}_{sI} \left[\mathbf{I} + \frac{S_I}{\sigma_w^2} V_I^H V_I \right]^{-1} \frac{S_I}{\sigma_w^2} \cdot N \cdot \boldsymbol{\rho}_{sI}^H \right] \right\}^{-1}$, $\boldsymbol{\rho}_{sI} = \frac{\mathbf{v}_s^H V_I}{N}$ 为空间相关矩阵,

其第 i 个分量 $[\boldsymbol{\rho}_{sI}]_i = \frac{\mathbf{v}_s^H \mathbf{v}_i}{N} = B_c(\mathbf{k}_i : \mathbf{k}_s)$ 。

同样 $[V_I^H V_I]_{ij} = \mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_j = B_c(\mathbf{k}_j : \mathbf{k}_i)$, 可见所有的空间关系均可用传统的天线方向图表示。

五、多个平面波信号源的最优波束形成器

考虑 D 个平面波信号源, 信号加噪声的频域快拍为:

$$\mathbf{X}(\omega) = V(\omega : \mathbf{k}_s) \mathbf{F}(\omega) + \mathbf{N}(\omega)$$

其中 $V_s = V(\omega : \mathbf{k}_s) = [\mathbf{v}(\mathbf{k}_1) | \cdots | \mathbf{v}(\mathbf{k}_D)]$ 为 $N \times D$ 维阵簇矩阵, $\mathbf{F}(\omega) = [F_1(\omega) \cdots F_D(\omega)]^T$ 为未知非随机信号矢量的复利叶变换。



我们仍然以 MVDR 准则为例，分析多个平面波信号源的最优波束形成器。

此时波束形成器为 $D \times N$ 维无失真矩阵处理器：

$$\mathbf{W}^H(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^H(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_D^H(\omega) \end{bmatrix}$$

无失真条件意味着：

$$\mathbf{w}_1^H \cdot \mathbf{V}_s \cdot \mathbf{F} = F_1,$$

..... ,

$$\mathbf{w}_D^H \cdot \mathbf{V}_s \cdot \mathbf{F} = F_D$$

$$\text{即： } \mathbf{w}_1^H \cdot \mathbf{v}_1 \cdot F_1 = F_1, \quad \mathbf{w}_1^H \cdot \mathbf{v}_2 \cdot F_2 = 0 \cdots \cdots, \quad \mathbf{w}_1^H \cdot \mathbf{v}_D \cdot F_D = 0$$

$$\text{或： } \mathbf{w}_1^H \cdot \mathbf{v}_1 = 1, \quad \mathbf{w}_1^H \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \cdots \cdots, \quad \mathbf{w}_1^H \cdot \mathbf{v}_D = 0$$

可见无失真条件要求对每一个波束形成器都有：

$$\mathbf{w}_i^H \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, D$$



可见, 第 i 个波束形成器对于第 i 个信号是无失真的, 而对其他 $D-1$ 个信号产生 $D-1$ 个理想零陷。

此时可得最佳 MVDR 波束形成器为:

$$\mathbf{W}_{do}^H = [\mathbf{V}^H \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{V}]^{-1} \mathbf{V}^H \mathbf{S}_n^{-1}$$

六、几种最优波束形成器的比较

➤ 三种 (SIR、MVDR 及 MMSE) 波束形成器的权矢量:

$$\mathbf{W}_{SIR} = \Lambda \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \text{其中} \quad \Lambda = \frac{E\{f^2(t)\}}{SIR} \cdot \mathbf{v}_s^H \mathbf{W}_{SIR} \circ$$

$$\mathbf{W}_{MVDR} = \Lambda \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \text{其中} \quad \Lambda = \frac{1}{\mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s} \circ$$

$$\mathbf{W}_{MMSE} = \Lambda \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \text{其中} \quad \Lambda = \frac{E\{d^2(t)\}}{1 + E\{d^2(t) \mathbf{v}_s^H R_n^{-1} \mathbf{v}_s\}} \circ$$

可见除了标量 Λ 的值不同, 上面三种 \mathbf{W}_{opt} 具有相同的形式。



$$R_n = I \longrightarrow \mathbf{w}_{MVDR} = \frac{1}{N} \mathbf{v}_s$$

即当干扰为空间白噪声时，传统波束形成器（即空间匹配滤波器或空间低通滤波器）为最佳 MVDR 波束形成器。

➤ 三种（SIR、MVDR 及 MMSE）波束形成器的性能：

$$\text{因为： } \mathbf{w}^H \cdot R_n \cdot \mathbf{w} = \Lambda^2 \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-H} \cdot R_n \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s = \Lambda^2 \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-H} \cdot \mathbf{v}_s$$

$$\text{故有： } \mathbf{w}^H \cdot R_f \cdot \mathbf{w} = \Lambda^2 \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-H} \cdot R_f \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s = \Lambda^2 \cdot E\{f^2(t)\} \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-H} \cdot \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s$$

所以：

$$SIR = \frac{\mathbf{w}^H \cdot R_f \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \cdot R_n \cdot \mathbf{w}} = \frac{E\{f^2(t)\} \cdot [\Lambda^2 \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s] \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s}{\Lambda^2 \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s} = E\{f^2(t)\} \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s$$

可见，上述各最优准则得到的输出与 Λ 无关，即 SIR 均相同。

各准则中的标量 Λ 分别为：

$$\Lambda_{MSE} = \frac{E\{d^2(t)\}}{1 + SIR}, \quad \Lambda_{SIR} = \frac{E\{f^2(t)\}}{SIR} \cdot \mathbf{v}_s^H \cdot \mathbf{w}_{opt}, \quad \Lambda_{MVDR} = \frac{E\{f^2(t)\}}{SIR} = \frac{E\{f^2(t)\}}{SIR} \cdot \mathbf{w}_{opt}^H \cdot \mathbf{v}_s = \Lambda_{SIR}$$



► 三种波束形成器需要的先验信息:

- MMSE 波束形成器: 需要时间参考信号 $d(t)$

$$\mathbf{w}_{MSE} = R_x^{-1} R_{dx}, \quad \text{其中 } R_{dx} = E\{d^*(t)\mathbf{x}(t)\}, \quad R_x = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\}。$$

- MVDR 波束形成器: 需要空间参考信号 \mathbf{v}_s

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \Lambda \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \text{其中 } \Lambda = \frac{1}{\mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s}。$$

- SIR 波束形成器: 需要已知信号和噪声/干扰的二阶统计特性

$$\mathbf{w}_{SIR} = \Lambda \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \Leftarrow \quad R_f \cdot \mathbf{w}_{SIR} = SIR \cdot R_n \cdot \mathbf{w}_{SIR}, \quad \text{其中 } \Lambda = \frac{E\{s^2(t)\}}{SIR} \cdot \mathbf{v}_s^H \mathbf{w}_{SIR}。$$

◆ 最优波束形成与经典波束形成的关系:

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \Lambda \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \text{其中 } \Lambda = \frac{1}{\mathbf{v}_s^H \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}_s}。$$

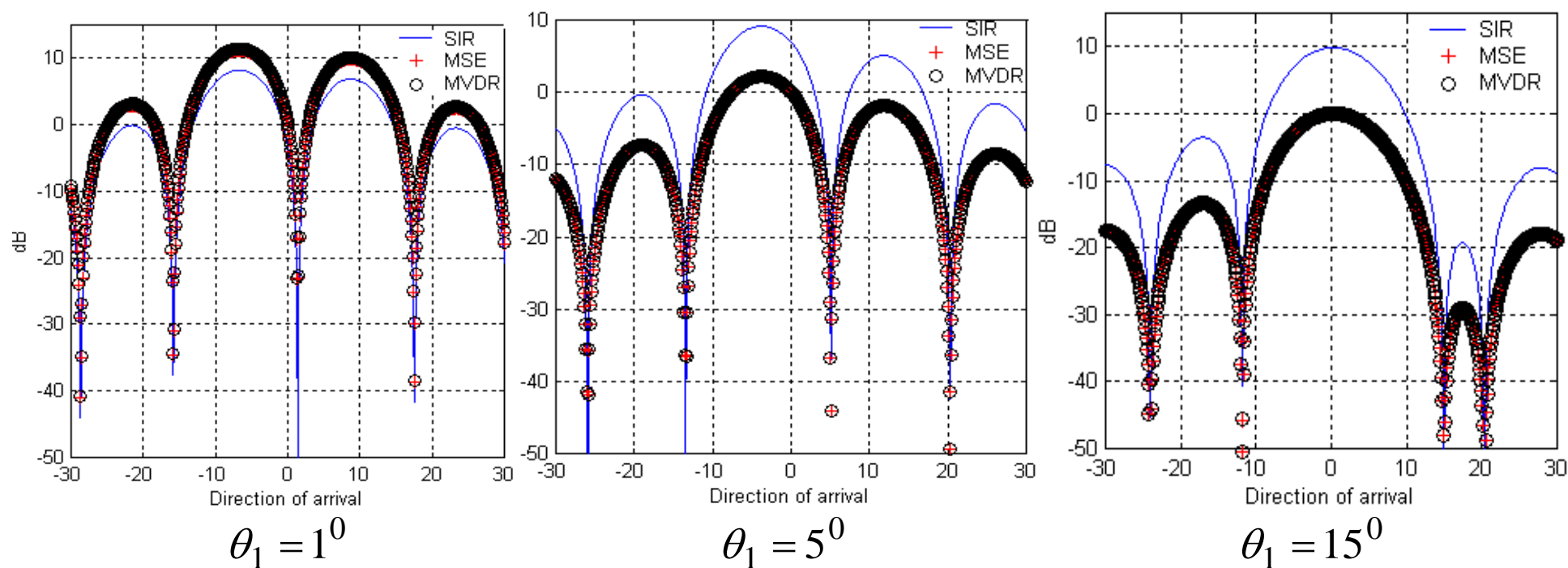
$R_n = I \longrightarrow \mathbf{w}_{MVDR} = \frac{1}{N} \mathbf{v}_s$, 即当干扰为空间白噪声时, 传统波束形成器 (即空间匹配滤波器或空间带通滤波器。) 为最佳 MVDR 波束形成器。



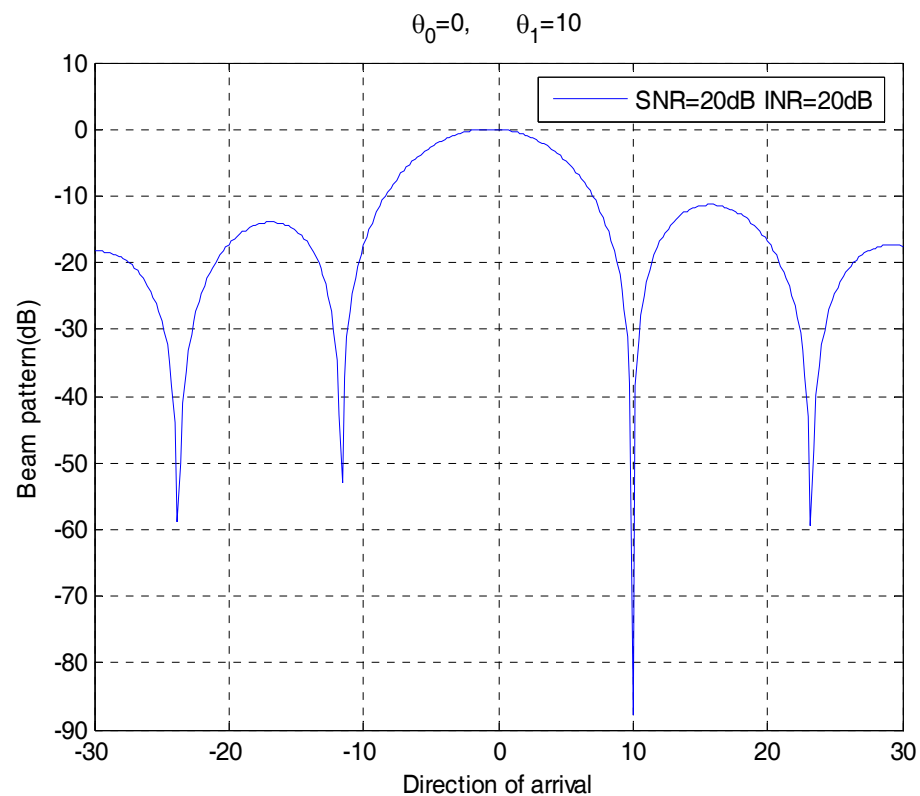
例 1: 考虑一个 10 单元的均匀线阵, $d = \frac{\lambda}{2}$, 两个入射平面波。考虑以下不同情况。

一个期望信号（到达方向 $\theta_0 = 0^\circ$ ）、一个为干扰信号（到达方向为 θ_1 ）

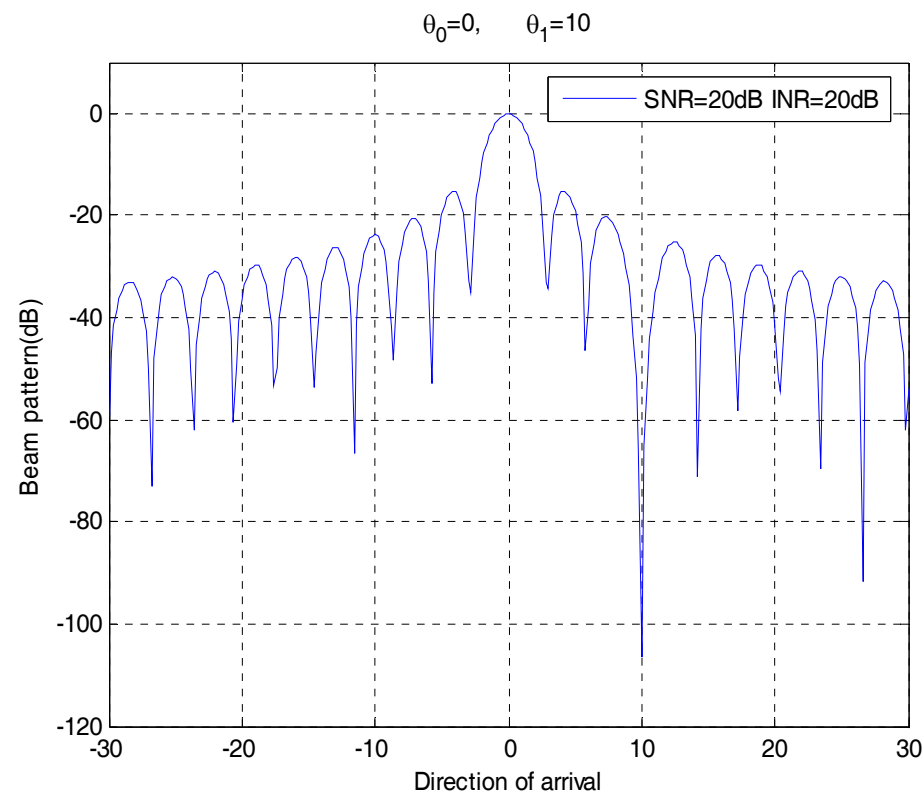
1) **比较不同波束形成器的性能:** 当 $\theta_1 = 1^\circ$ 、 5° 、 15° , 且 $\text{SNR}=20\text{dB}$, $\text{INR}=10\text{dB}$ 时, 最大 SIR、MSE 及 MVDR 波束形成器的天线方向图如下面各图所示。



2) **MVDR**, 分析阵元数 N 对方向图的影响: $\theta_1 = 10^\circ$, $\text{SNR}=20\text{dB}$, $\text{INR}=20\text{dB}$,



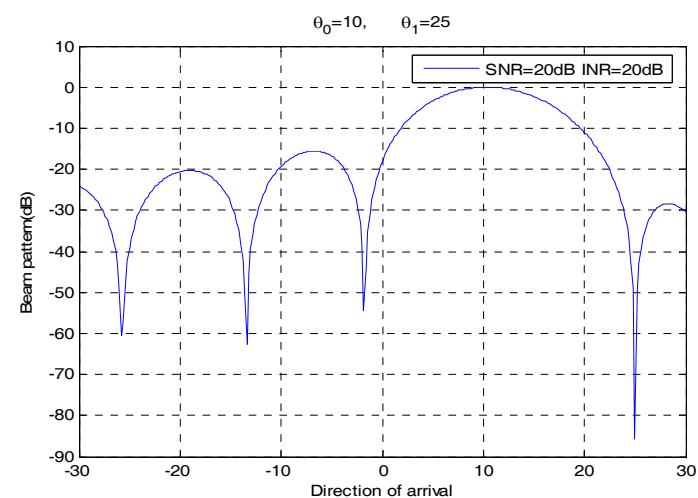
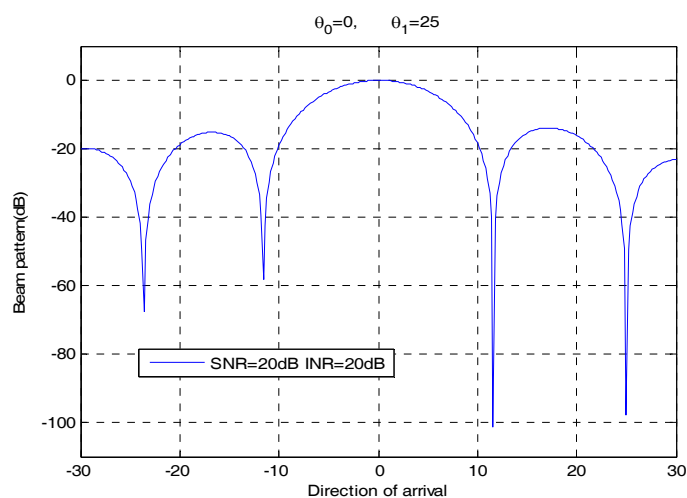
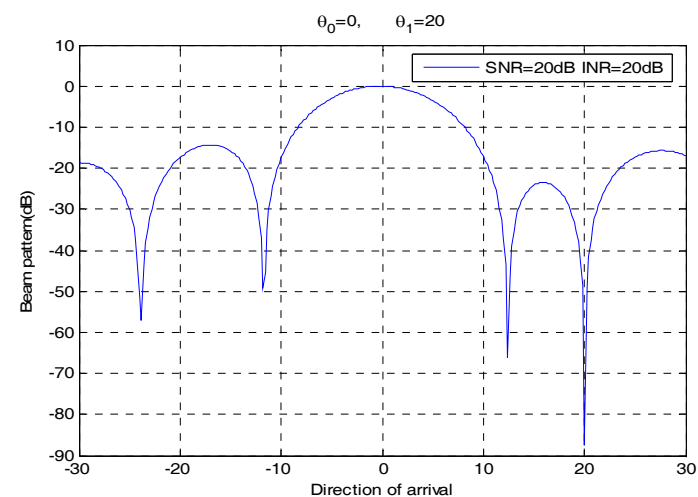
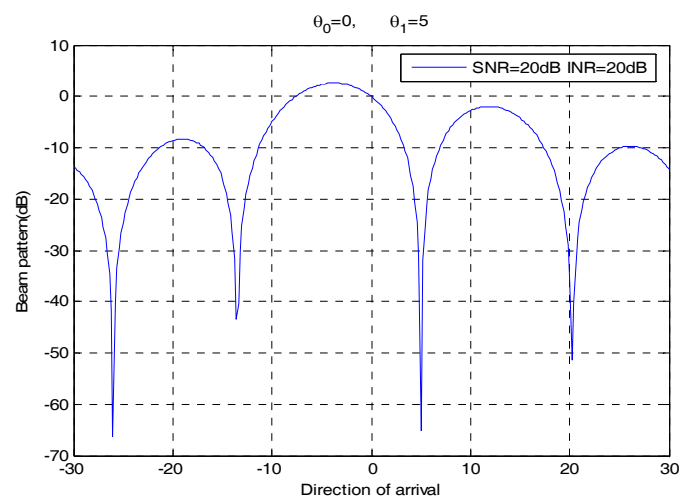
$N=10$



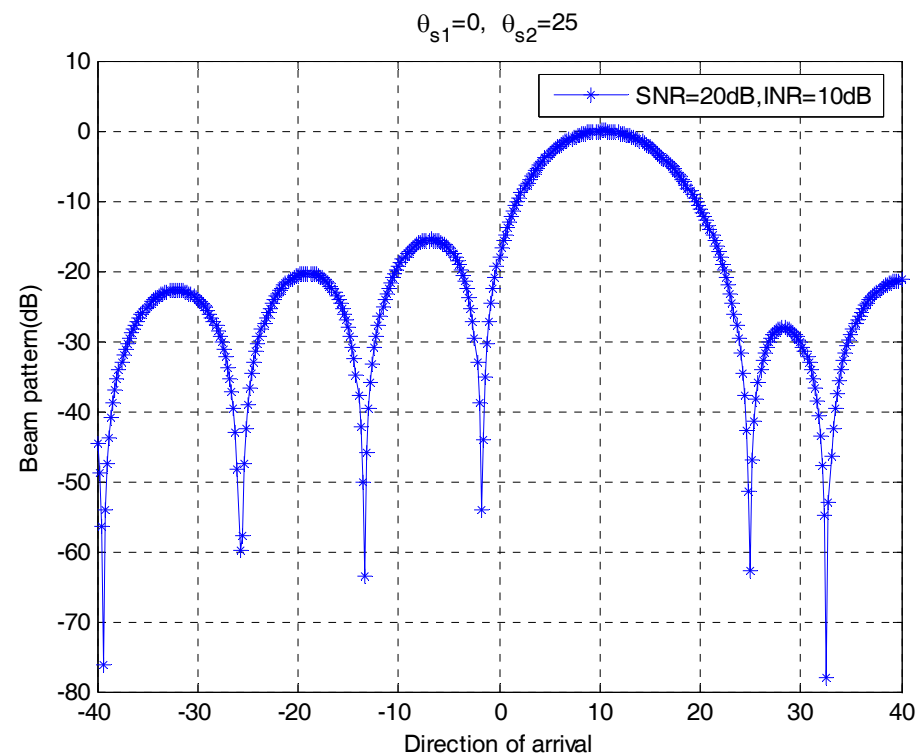
$N=40$



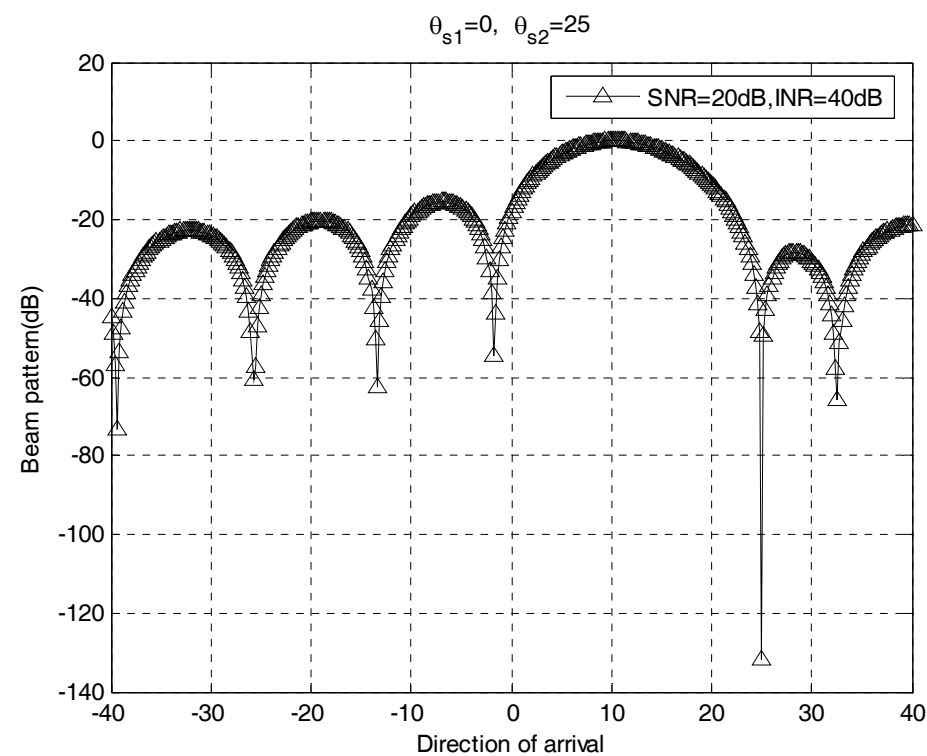
3) MVDR, 分析干扰到达方向对方向图的影响: $N=10$, $\text{SNR}=20\text{dB}$, $\text{INR}=20\text{dB}$



4) MVDR, 分析干扰功率对方向图的影响: $N=10$, $\text{SNR}=20\text{dB}$, $\theta_1 = 25$



INR = 10dB

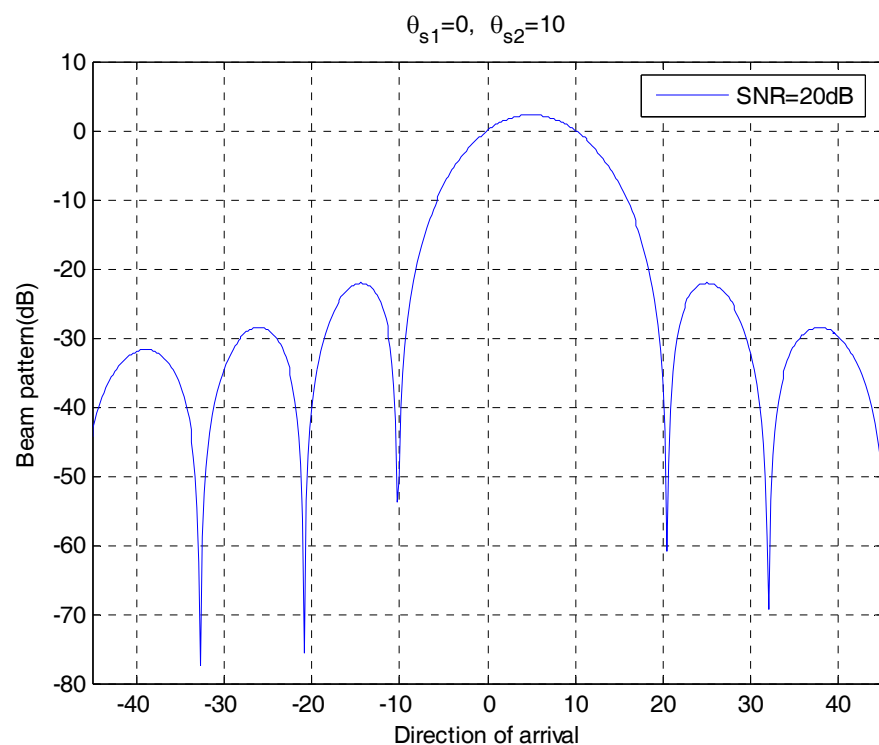


INR = 40dB

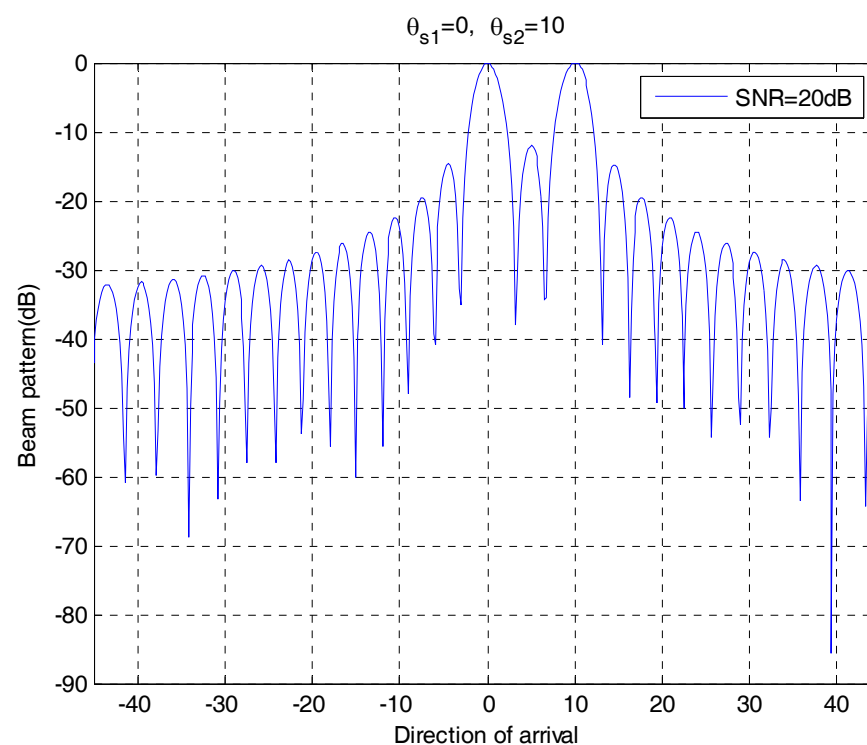


● 两个期望信号（到达方向分别为 $\theta_{s1} = 0^\circ$ 和 θ_{s2} ）、MVDR 波束形成器

1) 分析阵元数 N 对方向图的影响: $\text{SNR1}=\text{SNR2}=20\text{dB}$, $\Delta\theta = \theta_{s2} - \theta_{s1}$



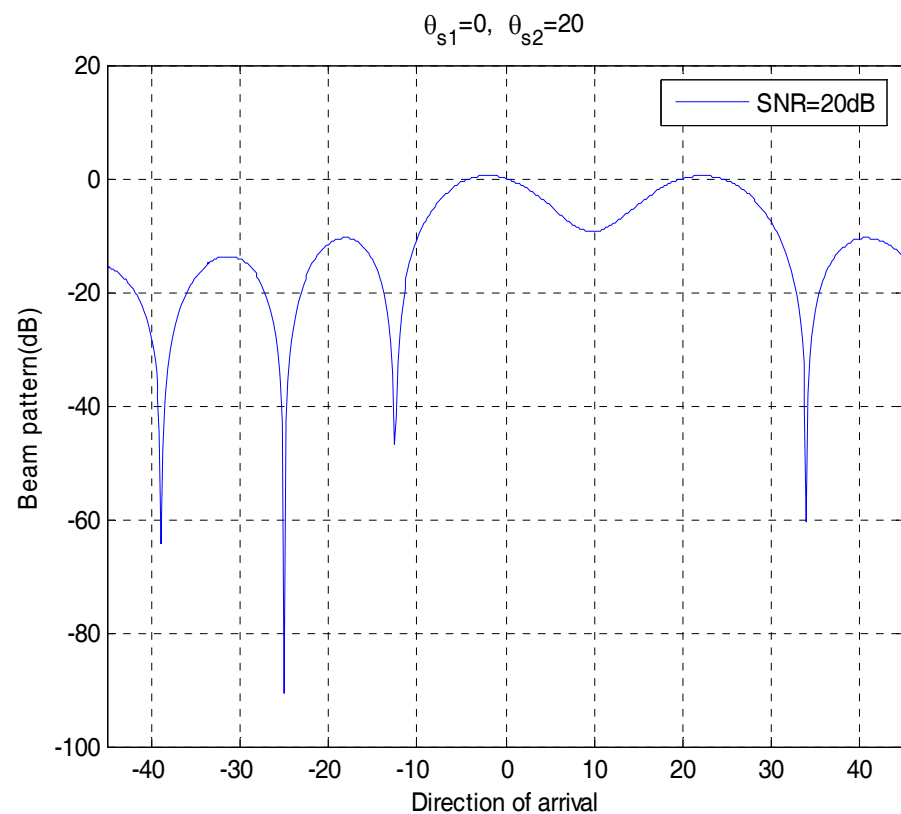
$$N=10, \theta_{\text{NN}} = 23.1^\circ > \Delta\theta$$



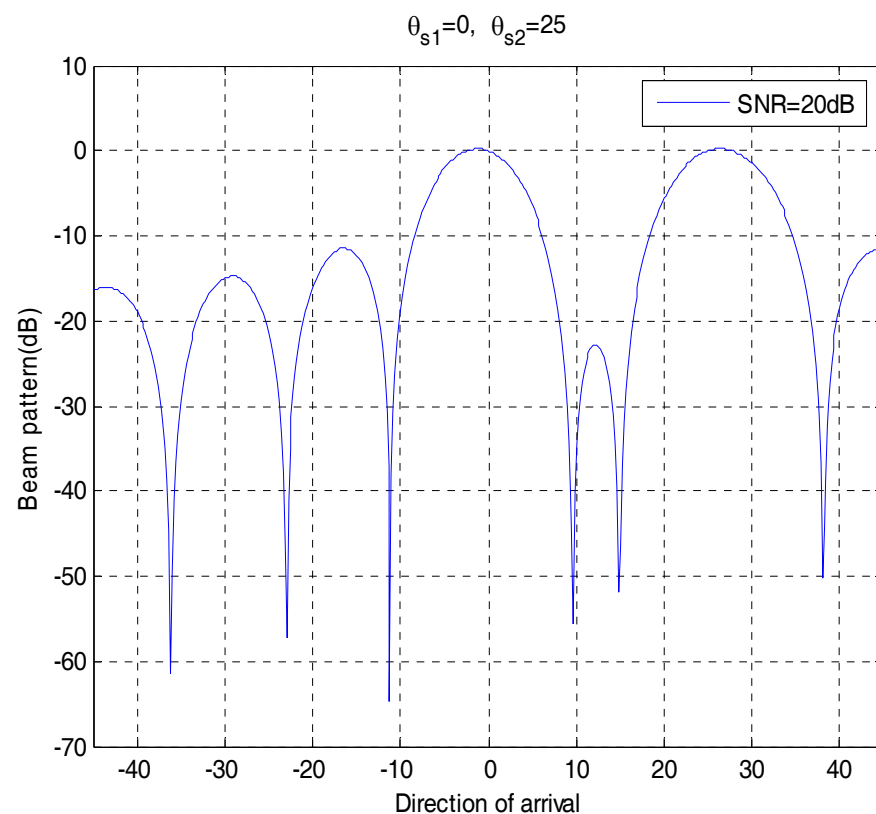
$$N=40, \theta_{\text{NN}} = 5.7^\circ < \Delta\theta$$



2) 分析到达方向对方向图的影响: $\text{SNR}_1=\text{SNR}_2=20\text{dB}$, $N=10$, $\theta_{\text{NN}} = 23.1^\circ$



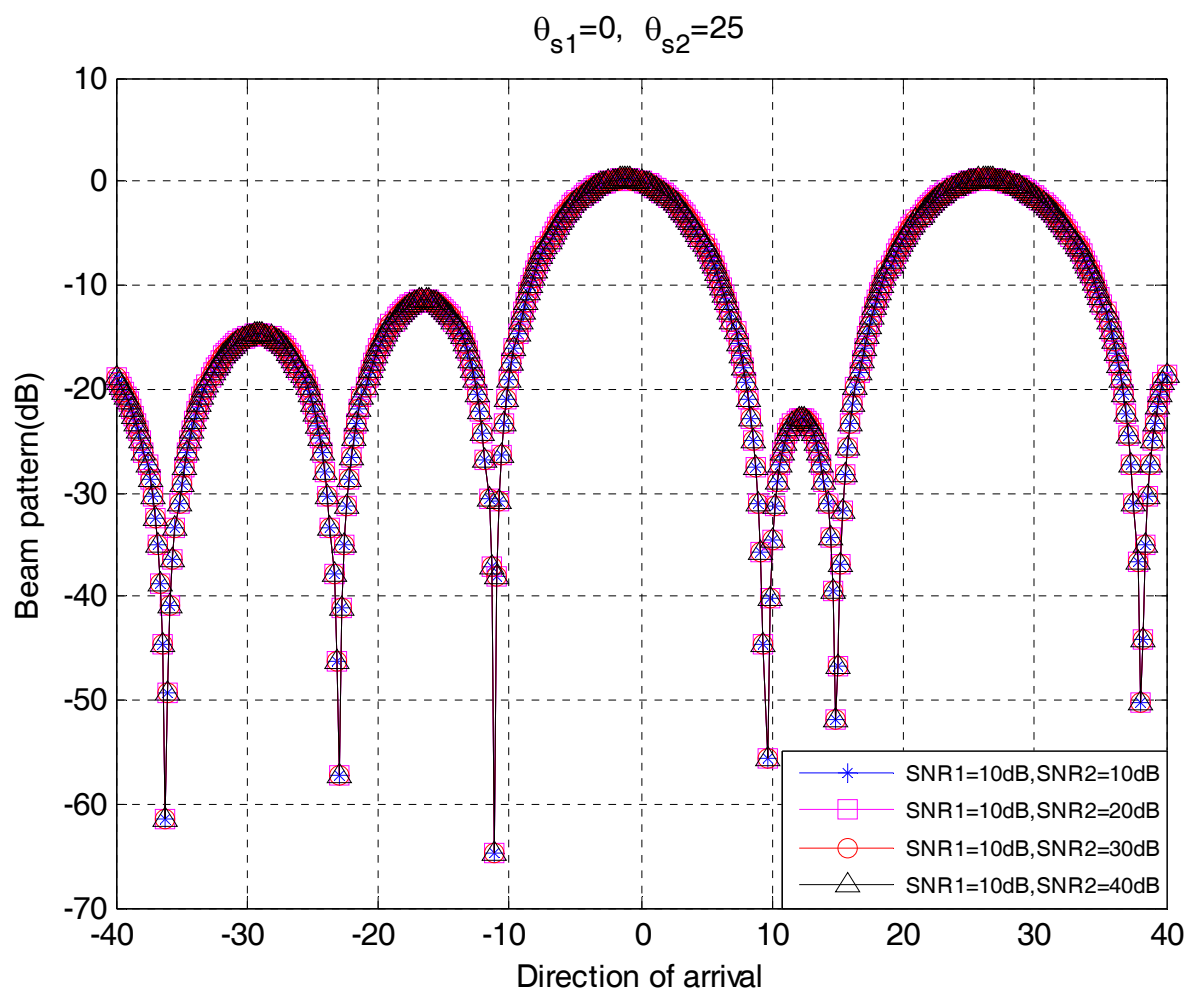
期望信号间隔为 20 度



期望信号间隔为 25 度



3) 分析信号功率对方向图的影响: $N=10$, $\text{SNR}_1=10\text{dB}$, $\text{SNR}_2=10, 20, 30, 40\text{dB}$



§2.4 失配条件下的 MVDR/MPDR 波束形成器

从上节的分析可知，理想 MVDR/MPDR 波束形成器的权值为：

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \Lambda_{MVDR} \cdot R_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_m$$

$$\mathbf{w}_{MPDR} = \Lambda_{MPDR} \cdot R_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_m$$

其中在设计最优加权值时假设期望信号的阵簇矢量为 \mathbf{v}_m ，即假设 $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_s$ 。

若此假设不成立，则出现失配问题。

从 MVDR/MPDR 波束形成器的加权值可见，造成失配有以下几个因素。

● **定向矢量失配** $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}(\omega_m, \mathbf{k}_m) \neq \mathbf{v}_s = \mathbf{v}(\omega_s, \mathbf{k}_s)$

✧ 定向矢量在频率波束域指向错误的点

定向矢量指向错误的角度： $\mathbf{a}_s \neq \mathbf{a}_m$

模型频率与实际频率不符： $\omega_s \neq \omega_m$

模型中的传播速度与实际速度不符；

✧ 阵列存在扰动：包括传感器增益、相位和位置误差 —— $\mathbf{v}_m(\mathbf{k}_d) \neq \mathbf{v}_s(\mathbf{k}_d)$



由于估计数据有限使得空间谱矩阵估计不准

$$\hat{S}_{\mathbf{n}} \neq S_{\mathbf{n}} \text{ 或 } \hat{S}_{\mathbf{x}} \neq S_{\mathbf{x}}$$

下面我们只介绍 DOA 失配对 MVDR/MPDR 波束形成器的影响，为了便于比较，也介绍 DOA 失配对传统波束形成器的影响。

这三种波束形成器的权向量分别为：

$$\mathbf{w}_c = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{v}_m; \quad \mathbf{w}_{MVDR} = \frac{S_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{v}_m^H \cdot S_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_m}; \quad \mathbf{w}_{MPDR} = \frac{S_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_m}{\mathbf{v}_m^H \cdot S_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_m}$$

其中 $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_m)$ 为设计波束形成器时采用的模型阵簇矢量。

采用频域快拍模型，阵列接收信号为：

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{F}(\omega) + \mathbf{N}(\omega)$$

其中 $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}(\omega, \mathbf{k}_a)$ 为实际阵簇矢量，可以与 \mathbf{v}_m 不同，信号 $\mathbf{F}(\omega)$ 的能量为 σ_s^2 。

为了简化分析并不失一般地，假设每个传感器单元的噪声功率相同，则可以定义一个归一化噪声谱矩阵(其中包括传感器噪声和平面波干扰源——若其存在的话)： $S_{\mathbf{n}} = S_n \mathbf{p}_{\mathbf{n}}$ 。



则单个传感器输入信噪比为：

$$SNR_{in} = \frac{\sigma_s^2}{S_n}$$

波束形成器输出功率为：

$$\begin{aligned} P_O &= \sigma_s^2 \left| \mathbf{w}^H \mathbf{v}_a \right|^2 + \mathbf{w}^H S_n \mathbf{w} \\ &= P_s + P_n \end{aligned}$$

波束形成器输出信噪比为：

$$SNR_O \triangleq \frac{P_s}{P_n} = \frac{\sigma_s^2 \left| \mathbf{w}^H \mathbf{v}_a \right|^2}{\mathbf{w}^H S_n \mathbf{w}}$$

阵列增益（波束形成器的输出信噪比与单个传感器输入信噪比之比

$A_\omega = SNR_o(\omega) / SNR_{in}(\omega)$ ）为：

$$A = \frac{\left| \mathbf{w}^H \mathbf{v}_a \right|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{p}_n \mathbf{w}}$$



一、失配时的传统波束形成器

传统波束形成器的权向量及天线方向图为：

$$\mathbf{w}_c = \frac{1}{N} \cdot \mathbf{v}_m; \quad B_c(\mathbf{k}) = \mathbf{w}_c^H \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_m) \mathbf{v}(\mathbf{k});$$

波束形成器输出信噪比为：

$$SNR_O = \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{v}_m^H \mathbf{v}_a|^2}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_n \mathbf{v}_m} = \frac{\sigma_s^2 N^2 |B_c(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_n \mathbf{v}_m};$$

阵列增益为：

$$A_c = \frac{N^2 |B_c(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{P}_n \mathbf{v}_m}$$

可见失配时的阵列增益与无失配时的阵列增益之比正好是阵列的功率方向图：

$$\frac{A_c(\mathbf{v}_a)}{A_c(\mathbf{v}_m)} = |B_c(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2$$



二、失配时的 MVDR 波束形成器

把上述 MVDR 波束形成器的权函数带入输出功率的公式中，可得输出信号功率为：

$$P_s = \sigma_s^2 \left| \mathbf{w}^H \mathbf{v}_a \right|^2 = \sigma_s^2 \left| \frac{\mathbf{v}_m^H S_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a}{\mathbf{v}_m^H S_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_m} \right|^2 = \sigma_s^2 \left| B_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m) \right|^2$$

$$= \sigma_s^2 \left| \frac{\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a}{\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_m} \right|^2 = \sigma_s^2 \left(\frac{\mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a}{\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_m} \right) \cos^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1})$$

其中 $\cos^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1}) \triangleq \frac{|\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a|^2}{(\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_m)(\mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a)}$ 为 $\rho_{\mathbf{n}}^{-1}$ 空间中的内积，可视为广义余弦函数。

输出噪声功率为：

$$P_n = \mathbf{w}^H S_{\mathbf{n}} \mathbf{w} = \Lambda = \left[\mathbf{v}_m^H S_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_m \right]^{-1}$$

失配时的输出信噪比为：

$$SNR_O = \sigma_s^2 \frac{|\mathbf{v}_m^H S_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a|^2}{\mathbf{v}_m^H S_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_m} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \frac{|\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a|^2}{\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_m}$$



失配阵列增益为:

$$A_{mvdr} = \frac{|\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \mathbf{v}_a|^2}{\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \mathbf{v}_m} = \left| \frac{\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \mathbf{v}_a}{\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \mathbf{v}_m} \right|^2 \cdot (\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \mathbf{v}_m) = A_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m) = \frac{|B_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2}{(\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \mathbf{v}_m)^{-1}}$$

$$= |B_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2 A_o(\mathbf{v}_m)$$

←^(6.28) $A_o(\mathbf{v}_a) = \mathbf{v}_a^H \boldsymbol{\rho}_n^{-1} \mathbf{v}_a$ 为无失配理想 MVDR 波束形成器的阵列增益。

归一化失配阵列增益只与 MVDR 波束形成器的天线方向图有关 (与传统波束形成器比较):

$$\frac{A_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)}{A_o(\mathbf{v}_m)} = |B_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2$$

三、失配时的 MPDR 波束形成器

在 MPDR 波束形成器中, 谱矩阵不仅包括噪声与干扰, 还包括信号。从前面对离散干扰下 MVDR 波束形成器的分析可见, 若 $\mathbf{v}_m \neq \mathbf{v}_a$, 则 MPDR 最优波束形成器将把信号视为离散干扰源而对之形成部分零陷。



MPDR 波束形成器的阵列增益为:

$$A_{mpdr} = \frac{\left| \mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{v}_a \right|^2}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1} \rho_n \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{v}_m}$$

空间谱矩阵为:

$$\mathbf{S}_x = \sigma_s^2 \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^H + \sigma_n^2 \rho_n$$

其中 $\sigma_n^2 = \sigma_\omega^2 + \frac{1}{N} \text{tr}[\mathbf{S}_c]$, \mathbf{S}_c 表示非白噪声分量。

根据矩阵求逆引理:

$$\mathbf{S}_x^{-1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \rho_n^{-1} \left\{ I - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^H \rho_n^{-1} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \mathbf{v}_a^H \rho_n^{-1} \mathbf{v}_a \right)^{-1} \right\}$$

为了得到 MPDR 波束形成器阵列增益的分子, 利用由矩阵求逆引理得到的空间谱矩阵有:



$$\mathbf{v}_m^H S_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{v}_a = \frac{1}{\sigma_n^2} \left\{ \mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a \left[1 - \mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a \right)^{-1} \right] \right\}$$

把对 \mathbf{v}_a 匹配的 MPDR 波束形成器的输出信噪比表示为:

$$M = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a \quad \xleftarrow{(6.28)} \quad A_{opt}(\mathbf{v}_a) = \mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a$$

则:

$$\mathbf{v}_m^H S_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a}{\sigma_n^2} \cdot \left[1 - \frac{M}{1+M} \right] = \frac{\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a}{\sigma_n^2 (1+M)}$$

同样把由矩阵求逆引理得到谱矩阵带入到 MPDR 波束形成器阵列增益的分母中, 有:

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_m^H S_{\mathbf{x}}^{-1} \rho_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{v}_m \\ &= \mathbf{v}_m^H \frac{1}{\sigma_n^2} \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \left[I - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} (1+M)^{-1} \right] \rho_{\mathbf{n}} \frac{1}{\sigma_n^2} \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \left[I - \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} (1+M)^{-1} \right] \mathbf{v}_m \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{\sigma_n^4} \mathbf{v}_m^H \rho_n^{-1} \mathbf{v}_m \left[1 - 2|B_{mvdr}|^2 \mathbf{v}_m^H \rho_n^{-1} \mathbf{v}_m \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} (1+M)^{-1} + |B_{mvdr}|^2 \mathbf{v}_m^H \rho_n^{-1} \mathbf{v}_m \frac{M}{(1+M)^2} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \right]$$

考虑广义余弦函数以及如下的关系：

$$\sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_n^{-1}) = 1 - \cos^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_n^{-1})$$

则上面的分母可进一步简化为：

$$DEN = \frac{1}{\sigma_n^4 (1+M)^2} \mathbf{v}_m^H \rho_n^{-1} \mathbf{v}_m \cdot [1 + (2M + M^2) \sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_n^{-1})]$$

故可得到 MPDR 波束形成器的阵列增益为：

$$\begin{aligned} A_{mpdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m) &= \frac{|\mathbf{v}_m^H S_x^{-1} \mathbf{v}_a|^2}{\mathbf{v}_m^H S_x^{-1} \rho_n S_x^{-1} \mathbf{v}_m} \\ &= \left| \frac{\mathbf{v}_m^H \rho_n^{-1} \mathbf{v}_a}{\sigma_n^2 (1+M)} \right|^2 \bigg/ \left[\frac{1}{\sigma_n^4 (1+M)^2} \mathbf{v}_m^H \rho_n^{-1} \mathbf{v}_m \cdot [1 + (2M + M^2) \sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_n^{-1})] \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{v}_a^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_a \cos^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1})}{1 + (2M + M^2) \sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1})} = \left\{ \frac{A_o(\mathbf{v}_a) \cos^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1})}{1 + (2M + M^2) \sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1})} \right\} \\
&= \frac{\mathbf{v}_m^H \rho_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{v}_m |B_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2}{1 + (2M + M^2) \sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1})} = \left\{ \frac{A_o(\mathbf{v}_m) |B_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2}{1 + (2M + M^2) \sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1})} \right\}
\end{aligned}$$

上式的分子即为存在失配时 MVDR 波束形成器的阵列增益，分母反映了在逆矩阵中包含信号时的效果。MVDR 和 MPDR 波束形成器的阵列增益之比为：

$$\frac{A_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)}{A_{mpdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)} = 1 + (2M + M^2) \sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_{\mathbf{n}}^{-1})$$

从上式可见，对 \mathbf{v}_a 匹配的 MPDR 波束形成器的输出信噪比 M 越大，上述比值也越大，意味着当采用 MPDR 波束形成器时对信号的抑制越大；即信号越强，失配时被抑制得越厉害。当信噪比很高时，很小的 DOA 失配都会造成性能的急剧下降。

➔在实际应用中有必要设计避免上述性能损失的波束形成器。人们把在失配条件下仍然保持良好性能的波束形成器称为**鲁棒波束形成器**，其设计目标是在失配时的性能至少不比传统波束形成器差。



§2.5 线性限制最小功率/方差波束形成器 (LCMV/LCMP)

在 MVDR 和 MPDR 波束形成器中，我们引入了一个线性限制： $\mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}_m = 1$ 。从上一阶的分析可见，这种波束形成器对于环境变化的鲁棒性不好。

下面通过引入更多的线性限制以提高波束形成器的鲁棒性。

一、LCMV 与 LCMP 波束形成器

传感器阵列的输出噪声方差为：

$$E\{|y_n(t)|^2\} = \mathbf{w}^H \cdot E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \cdot R_n \cdot \mathbf{w}$$

线性限制最小方差 (LCMV: Linearly Constrained Minimum Variance) 波束形成器的加权矢量满足：

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \cdot R_n \cdot \mathbf{w}, \quad s.t. \quad C^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$$

其中 C 为限制矩阵，假定 C 满秩； \mathbf{f} 为阵列响应矢量。

利用拉格朗日乘子方法，可以解决上述约束条件下的最优化问题，得到最佳权矢量为：



$$\mathbf{w}_{LCMV} = R_n^{-1} \cdot C \left(C^H \cdot R_n^{-1} \cdot C \right)^{-1} \mathbf{f}$$

若噪声为白色（即没有平面波干扰）的，则退化为与接收数据无关的静态加权向量：

$$\mathbf{w}_q = C(C^H C)^{-1} \mathbf{f}$$

若优化准则为在上述约束条件下使传感器阵的输出功率最小，则设计的波束形成器为线性限制最小功率（LCMP）波束形成器。其优化准则和最佳权矢量分别为：

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \cdot R_x \cdot \mathbf{w}, \quad s.t. \quad C^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{w}_{LCMP} = R_x^{-1} \cdot C \left(C^H \cdot R_x^{-1} \cdot C \right)^{-1} \mathbf{f}$$

二、线性限制的设计

设传感器由 N 个阵元组成。若有 K 个线性限制，则限制矩阵 C 是 $N \times K$ 阵， \mathbf{f} 为 $K \times 1$ 矢量。 C 的每一列和 \mathbf{f} 的相应元素代表其中的一个线性限制。

若 $K = N$ ，则从限制方程可得唯一的权矢量。设 $K < N$ ，则设计 \mathbf{w} 的自由度为 $N - K$ 。



1. 单点限制

若期望信号对应的时空参数为 (θ_0, ω_0) ，则我们希望限制波束形成器在 (θ_0, ω_0) 处的响应为 1。这时线性限制应为 $\mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\theta_0, \omega_0) = 1$ ，即 $C = \mathbf{v}(\theta_0, \omega_0)$ ， $\mathbf{f} = 1$ ，实际上这就是上一节介绍的无失真线性限制，是单点限制的一个特例。

在一般情况下，单点线性限制的形式为：

$$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta, \omega) = r$$

其中 r 是 (θ, ω) 处期望达到的复响应。

若我们知道一个干扰的时空参数为 (θ_i, ω_i) ，则我们希望限制波束形成器在 (θ_i, ω_i) 处的响应为 0，即线性限制为零陷限制： $\mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\theta_i, \omega_i) = 0$ 。

2. 多点限制

若我们同时知道期望信号与干扰的时空参数，则可以得到如下的多点限制：

$$\mathbf{w}^H [\mathbf{v}(\theta_0, \omega_0) \quad \mathbf{v}(\theta_i, \omega_i)] = [1 \quad 0]$$

即 $k = 2$ ， $C = [\mathbf{v}(\theta_0, \omega_0) \quad \mathbf{v}(\theta_i, \omega_i)]$ ， $\mathbf{f}^H = [1 \quad 0]$ 。



上述点限制最常被用于窄带波束形成中，此时阵列响应常只要求在某一频率上受到限制。在宽带阵中，阵列响应往往要求被限制在一个频带范围内，这时，点限制方法不再适用。当存在时空参数失配或不确定性时，窄带和宽带阵都要将阵列响应限制在一个较宽的范围内。

为了解决这个问题，可以采用较密集的多点限制来近似地在一定范围内控制输出响应。例如，若已知信号位于一个小的空域 $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ 内，则我们可以采用如下的多点限制：

$$\mathbf{w}^H [\mathbf{v}(\theta_0 - \delta, \omega_0) \quad \mathbf{v}(\theta_0, \omega_0) \quad \mathbf{v}(\theta_0 + \delta, \omega_0)] = [1 \quad 1 \quad 1]$$

来近似地控制阵列输出响应在上述空域内为 1。

如果 δ 较大，则为了更好地近似需要较多的点限制，这将占用大量的自由度。

3. 导数限制

另一种解决上述问题的方法是限制阵列响应在某个方向或频率处的导数为 0，即线性限制为：

$$\frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\theta, \omega_0) |_{\theta=\theta_0} = 0$$



$$\text{或} \quad \mathbf{w}^H \cdot \left(\frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \mathbf{v}(\theta, \omega_0) \Big|_{\theta=\theta_0} \right) = 0$$

导数阶数越高，在 θ_0 附近的响应就越平坦。

这种方法的缺点是只能间接地控制阵列响应，在实际应用中到底应用几阶导数才能满足要求并不明确。

4. 特征值限制（注意与第一章中期望天线方向图设计的最小平方误差法的区别）

还有一种解决上述问题的方法是特征值限制，它使在指定的频率-波数区域内期望响应与实际响应之间的总平方误差最小，这种方法在最小平方误差意义上是最佳的。

令 $B_d(\theta, \omega)$ 为在 $\theta \in \Theta$ 和 $\omega \in \Omega$ 区域内波束形成的期望响应，则期望响应与实际响应之间的总平方误差为：

$$e^2 = \int_{\theta \in \Theta} \int_{\omega \in \Omega} |B_d(\theta, \omega) - \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\theta, \omega)|^2 d\omega d\theta = \mathbf{w}^H \mathbf{Q} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w} + \sigma_d^2$$

$$\text{其中} \quad \mathbf{Q} = \int_{\theta \in \Theta} \int_{\omega \in \Omega} \mathbf{v}(\theta, \omega) \mathbf{v}^H(\theta, \omega) d\omega d\theta$$



$$\mathbf{p} = \int_{\theta \in \Theta} \int_{\omega \in \Omega} \mathbf{v}(\theta, \omega) B_d^*(\theta, \omega) d\omega d\theta$$

$$\sigma_d^2 = \int_{\theta \in \Theta} \int_{\omega \in \Omega} |B_d(\theta, \omega)|^2 d\omega d\theta$$

Q 是一个非负定的 Hermitian 阵，其特征值分解为：

$$Q = U_Q \cdot \Lambda_Q \cdot U_Q^H = \sum_{i=1}^N \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^H$$

其中 Λ_Q 是由 Q 的特征值 $\lambda_i, i=1, \dots, N$ 组成的对角阵，满足：

$$\lambda_1 \gg \lambda_2 \gg \dots \gg \lambda_N \gg 0,$$

$\Phi = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_N]$ 的第 i 列为 Q 的特征矢量 $\boldsymbol{\varphi}_i$ 。

因为特征向量是正交的，即 $\Phi \Phi^H = \mathbf{I}$ ，有 $\mathbf{p} = \Phi \cdot \Phi^H \cdot \mathbf{p}$ ，所以：

$$\begin{aligned} e^2 &= \mathbf{w}^H Q \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w} + \sigma_d^2 \\ &= \sigma_d^2 + \sum_{i=1}^K \lambda_i |\boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w}|^2 - \mathbf{w}^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w} \\ &\quad + \sum_{i=K+1}^N \lambda_i |\boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w}|^2 - \mathbf{w}^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sigma_d^2 + \sum_{i=1}^K \lambda_i |\boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w} - \lambda_i^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{p}|^2 - \lambda_i^{-1} \cdot \mathbf{p}^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w} \\
&\quad + \sum_{i=K+1}^N \lambda_i |\boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w}|^2 - \mathbf{w}^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w}
\end{aligned}$$

若 $\lambda_i, i = k+1, \dots, N$ 非常小, 则使上式中第一个和式最小将近似地使 e^2 最小, 即此时线性限制为:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{w} = \lambda_i^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^H \cdot \mathbf{p}, \quad i = 1, 2, \dots, K$$

在这组限制中, C 中的各列向量对应于 Q 的 K 个最大特征值, 故被称为特征向量限制。

三、LCMV/LCMP 的另一种实现形式

— 广义旁瓣对消器 (GSC: Generalized Sidelobe Canceller)

LCMP 波束形成器的优化准则为:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{w}, \quad s.t. \quad \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$$

其中 \mathbf{C} 为 $N \times K$ 维限制矩阵, \mathbf{f} 为 $K \times 1$ 矢量, N 为阵元个数, K 为线性限制的个数。



GSC 把 LCMP 的权矢量分成了约束权矢量和无约束权矢量两部分，从而把约束最优化问题变成了无约束最优化问题。这是一种与 LCMP 完全等价但实现结构不同的波束形成器。

GSC 波束形成器的结构如下图所示。

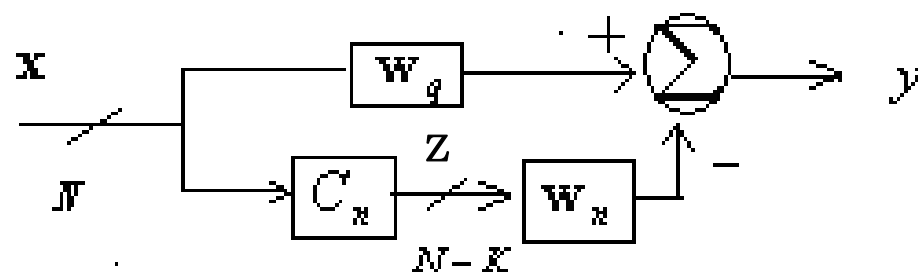


图 3

设 $N \times (N - K)$ 矩阵 C_n 的列表示 $N \times K$ 维限制矩阵 C 的列所张成空间的正交补空间的基， C 和 C_n 的**所有列**张成了整个 N 维空间，即 $C^H C_n = \mathbf{0}$ 。

N 个阵元的加权系数可以用上面的基向量表示为互相正交的两个部分：

$$\mathbf{w} = C\bar{\mathbf{w}} - C_n\mathbf{w}_n$$

其中 $\bar{\mathbf{w}}(K \times 1)$ 和 $\mathbf{w}_n((N - K) \times 1)$ 分别表示 \mathbf{w} 在 C 和 C_n 张成的空间中的分量。

这样，我们就可以对上述两个互相正交的权向量分别进行设计。



由于 C 和 C_n 的列是正交的: $C^H C_n = \mathbf{0}$, 且 $C^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$, 故:

$$\therefore C^H \mathbf{w} = C^H C \bar{\mathbf{w}} - C^H C_n \mathbf{w}_n = C^H C \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{f}$$

$$\therefore \bar{\mathbf{w}} = (C^H C)^{-1} \mathbf{f}$$

即 GSC 波束形成器的权向量为:

$$\mathbf{w} = C \bar{\mathbf{w}} - C_n \mathbf{w}_n = C(C^H C)^{-1} \mathbf{f} - C_n \mathbf{w}_n = \mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n$$

从上式可见, 权向量 \mathbf{w}_q 对应于一个满足所有限制条件的非自适应波束形成器, 与阵列的接收数据无关。而限制对 \mathbf{w}_n 没有影响, \mathbf{w}_n 完全由阵列接收数据决定, 所以 \mathbf{w}_n 的维数 $N-K$ 反映了 \mathbf{w} 中的自由度——即可根据接收数据自由调整的加权系数的个数。

由于利用自由度为 N 的加权向量可以形成 $N-1$ 个零陷从而抑制 $N-1$ 个干扰, 所以加了 K 维线性限制以后, LCMP 或 GSC 只能抑制 $N-K-1$ 个干扰。通常在实际应用中人们对期望信号都有一定的先验知识, 故所加的各种线性限制一般是为了保证信号不失真, 而在加权向量中留下一些自由度以便波束形成器可以根据阵列接收数据自适应地抑制可能存在的未知干扰。

将输入数据 \mathbf{x} 在 C 和 C_n 的列所张成的空间中投影, 即阵列接收数据也可以用上面的基向



量表示为互相正交的两个部分：

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x}_c + C_n\mathbf{x}_n$$

代入 $y = \mathbf{w}^H \mathbf{x}$ ，且考虑 $\mathbf{w}_q^H C_n = \mathbf{0}$ ，则

$$\begin{aligned} y &= (\mathbf{w}_q^H - \mathbf{w}_n^H C_n^H) \cdot (C\mathbf{x}_c + C_n\mathbf{x}_n) \\ &= \mathbf{w}_q^H C\mathbf{x}_c - \mathbf{w}_n^H C_n^H C\mathbf{x}_c + \mathbf{w}_q^H C_n\mathbf{x}_n - \mathbf{w}_n^H C_n^H C_n\mathbf{x}_n \\ &= \mathbf{w}_q^H C\mathbf{x}_c - \mathbf{w}_n^H C_n^H C_n\mathbf{x}_n \end{aligned}$$

可见 \mathbf{w}_q 只影响投影到 C 张成的空间中的数据 \mathbf{x}_c ， \mathbf{w}_n 只影响投影到 C_n 张成的空间中的数据 \mathbf{x}_n 。

矩阵 C_n 阻塞了输入数据 \mathbf{x} 中的所有属于 C 所张成空间的分量，而矩阵 C 则常被用来保留信号，即期望信号应完全被包含在 C 所张成的空间中，故 C_n 常被称为信号阻塞矩阵，因其列与信号所在的空间正交。由 $C^H C_n = \mathbf{0}$ 可见， C_n 的选择是不唯一的。

加权向量也可以用投影矩阵表示为：



$$\mathbf{w} = P_C \cdot \mathbf{w} + P_C^\perp \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}_c + \mathbf{w}_{cn}$$

$$\mathbf{w}_c = P_C \cdot \mathbf{w} = P_C \cdot R_x^{-1} \cdot C(C^H \cdot R_x^{-1} \cdot C)^{-1} \mathbf{f} = C(C^H C)^{-1} \mathbf{f} \quad \text{—} \quad \mathbf{w}_{LCMP} = R_x^{-1} \cdot C(C^H \cdot R_x^{-1} \cdot C)^{-1} \mathbf{f}$$

$$\mathbf{w}_{cn} = P_C^\perp \cdot \mathbf{w}$$

其中 $P_C = C(C^H C)^{-1} C^H$ 为投影到限制空间的投影矩阵, $P_C^\perp = I - C(C^H C)^{-1} C^H$ 为与其正交的矩阵。

比较上面用基向量和投影矩阵表示加权向量的两种方法, 可知一种选择 C_n 的方法是先计算与投影矩阵正交的矩阵 $P_C^\perp = I - C(C^H C)^{-1} C^H$, 而后对 P_C^\perp 进行正交化并选择其前 $N - K$ 列构成 C_n 。

前面我们根据线性限制得到了只与限制矩阵有关的静态波束加权向量 $\mathbf{w}_q = C(C^H C)^{-1} \mathbf{f}$, 下面再根据最小输出功率准则得到完全由阵列接收数据决定的加权向量 \mathbf{w}_n 。波束形成器的输出功率为:

$$E\{y^2(t)\} = E\{|\mathbf{w}^H \mathbf{x}|^2\}$$



$$\begin{aligned}
&= E\left\{\left[(\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{x}\right]^2\right\} = E\left\{\left[\mathbf{w}_q^H \mathbf{x} - (C_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{x}\right]^2\right\} \triangleq E\left\{\left[y_q - y_n\right]^2\right\} = e^2 \\
&= (\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n)^H E\{\mathbf{x}^H \mathbf{x}\} (\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n) \\
&= (\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n)^H R_x (\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n) \\
&= \mathbf{w}_q^H R_x \mathbf{w}_q - \mathbf{w}_q^H R_x C_n \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_n^H C_n^H R_x \mathbf{w}_q + \mathbf{w}_n^H C_n^H R_x C_n \mathbf{w}_n \\
&= \left[\mathbf{w}_n - (C_n^H R_x C_n)^{-1} C_n^H R_x \mathbf{w}_q\right]^H C_n^H R_x C_n \left[\mathbf{w}_n - (C_n^H R_x C_n)^{-1} C_n^H R_x \mathbf{w}_q\right] \\
&\quad + \mathbf{w}_q^H R_x \mathbf{w}_q - \mathbf{w}_q^H R_x C_n (C_n^H R_x C_n)^{-1} C_n^H R_x \mathbf{w}_q
\end{aligned}$$

当 $\mathbf{w}_n = (C_n^H R_x C_n)^{-1} C_n^H R_x \mathbf{w}_q$ 时，上式最小。即 GSC 波束形成器的加权向量为：

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n = \mathbf{w}_q - C_n (C_n^H R_x C_n)^{-1} C_n^H R_x \mathbf{w}_q, \quad \text{注意: } \mathbf{w}_n : (N-K) \times 1$$

从上面的推导可见，当把加权函数分成如上正交的两部分后，LCMP 问题：

$$\min_{\mathbf{w}} E\{y^2(t)\} = \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \cdot R \cdot \mathbf{w}, \quad s.t. \quad \mathbf{c}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$$



实际上变成了无约束最优化问题，即是 GSC 框图中上下两个支路 $y_q = \mathbf{w}_q^H \mathbf{x}$ 和 $y_n = (C_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{x}$ 的最小均方误差。其中 y_q 可视为由限制矩阵决定的等效期望信号， y_n 为 y_q 的 MMSE 估计。

下面通过一个简单的例子，进一步理解 GSC 波束形成器的本质。

例： 设 $\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$ ，其中 \mathbf{s} 是期望信号所对应的数据分量， \mathbf{n} 是干扰和噪声引起的数据分量。

假定设计波束形成器的约束条件是保留期望信号，即把 \mathbf{s} 映射在限制阵 C 所张成的空间中，故 $C_n^H \mathbf{s} = 0$ ，则 GSC 波束形成器的输出为：

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{w}^H \mathbf{x} = (\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{x} \\ &= y_q - y_n = (\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n)^H (\mathbf{s} + \mathbf{n}) = \mathbf{w}_q^H (\mathbf{s} + \mathbf{n}) - (C_n \mathbf{w}_n)^H (\mathbf{s} + \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{w}_q^H \mathbf{s} + \mathbf{w}_q^H \mathbf{n} - (C_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{n} \end{aligned}$$

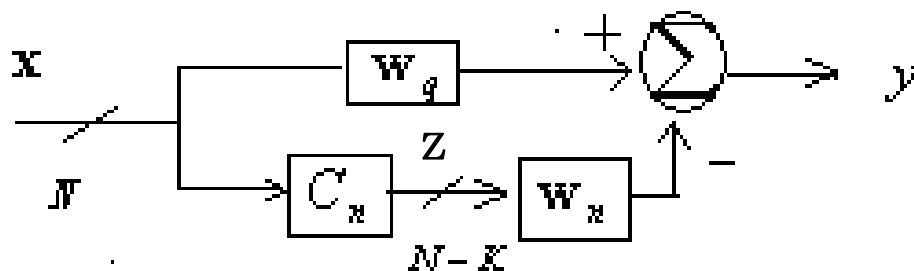


图 3/again



可见，使波束形成器的输出功率 $E\{y^2(t)\}$ 最小

\Leftrightarrow 使波束形成器上下两个支路 $y_q = \mathbf{w}_q^H \mathbf{x}$ 和 $y_n = (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{x}$ 之间的均方误差最小

$\Leftrightarrow y_n$ 为 y_q 的 MMSE 估计

$\Leftrightarrow (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{n}$ 为 $\mathbf{w}_q^H \mathbf{n}$ 的 MMSE 估计

——→ 从下面的支路中估计出干扰和噪声，再从上面的支路中将其减去——此即旁瓣对消器的概念（参见第一章 § 1.6 中的 **五、特殊天线方向图设计**）。

为了分析 GSC 波束形成器与其他最优波束形成器的关系，其输出还可以表示为：

$$y(t) = \mathbf{w}_q^H \mathbf{s} + (\mathbf{w}_q - \mathbf{C}_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{n}$$

进一步假设信号与干扰不相关，则输出功率为：

$$E\{|y|^2\} = \mathbf{w}_q^H \mathbf{R}_s \mathbf{w}_q + \mathbf{w}_n^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_n$$

可见，在 $\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f}$ 约束条件下使输出功率最小，等价于使干扰和噪声输出功率最小，即波束形成器的输出信噪比最大。不过，对于一般的 LCMP 波束形成器，如当信号与干扰相关时，并不能使其输出信噪比达到最大值。



例 2: 考虑一个 10 单元的均匀线阵, $d = \frac{1}{2}\lambda$, 期望信号到达方向为 $\theta_0 = 0^\circ$, $\text{SNR}=10\text{dB}$, 一个干扰源的到达方向分别为 $\theta_1 = 5^\circ$ 和 $\theta_1 = 15^\circ$ 两种情况, $\text{INR}=10\text{dB}$ 。

考虑在下述几种限制条件下的天线方向图。

(1) 单点限制: $\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta_0) = 1$

(2) 双点限制: $\mathbf{w}^H [\mathbf{v}(\theta_0) \quad \mathbf{v}(\theta_1)] = [1 \quad 0]$

(3) $\mathbf{w}^H [\mathbf{v}(\theta_0 - \delta) \quad \mathbf{v}(\theta_0) \quad \mathbf{v}(\theta_0 + \delta)] = [1 \quad 1 \quad 1]$, $\delta = 0.5$

(4) $\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta_0) = 1$, $\frac{d}{d\theta} \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta) |_{\theta=\theta_0} = 1$



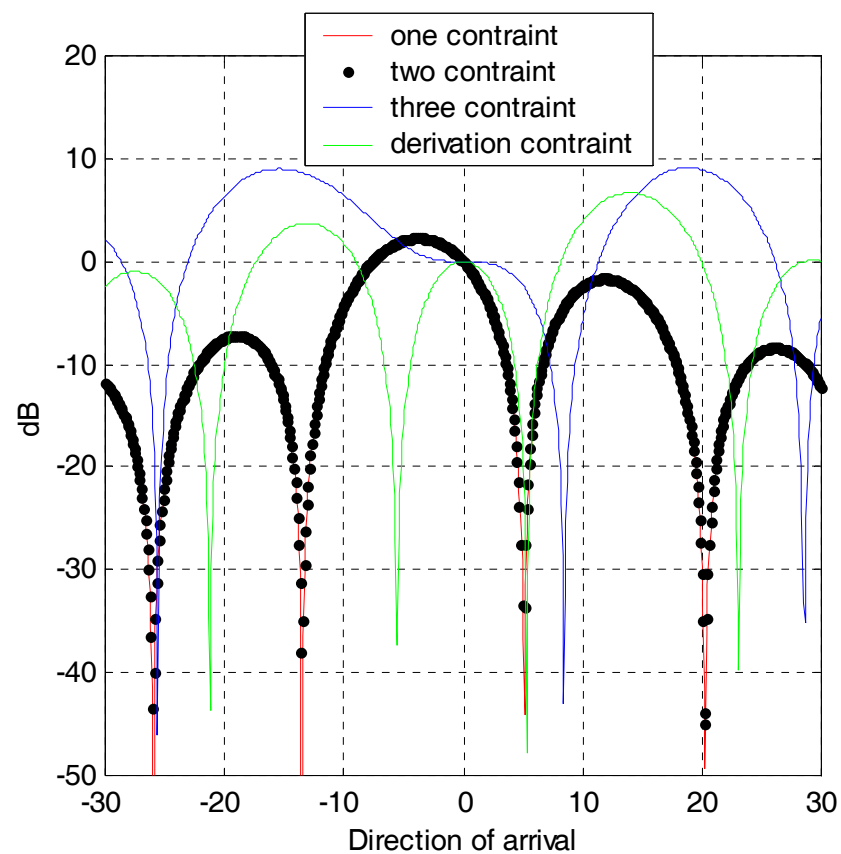


图 4(a) $\theta_1 = 5^\circ$, INR=10dB

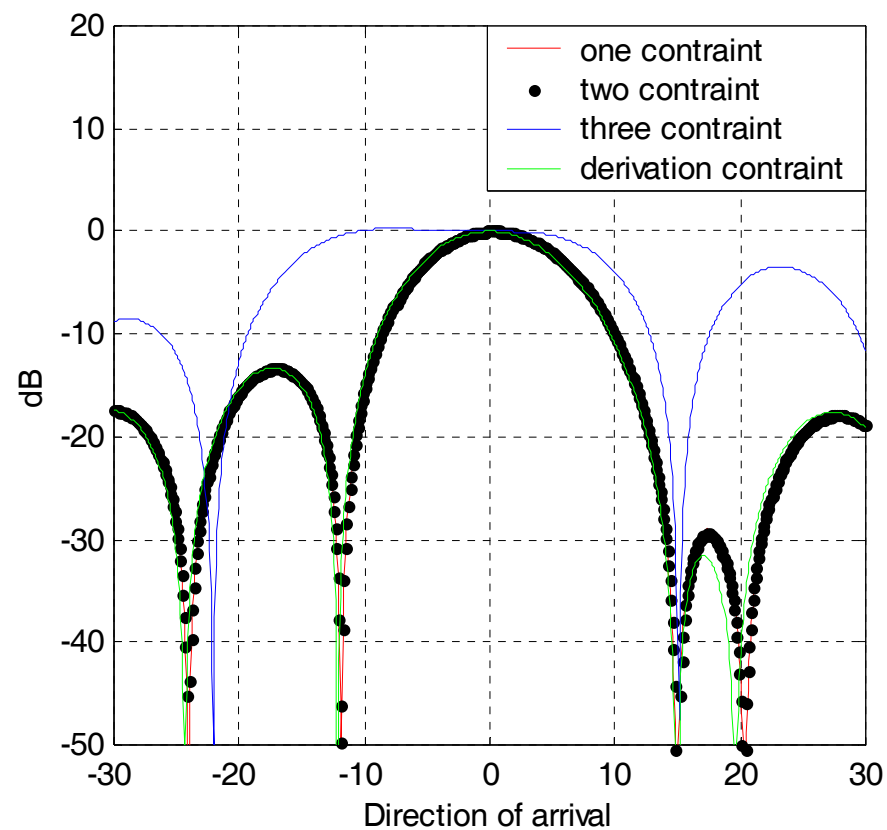


图 4(b) $\theta_1 = 15^\circ$, INR=10dB

$\theta_0 = 0^\circ$, SNR=10dB



§2.6 平方限制波束形成器

平方限制波束形成器一般被用于改善波束形成器在失配条件下的性能。

上一节的特征值限制波束形成器是设计线性限制权系数使平方响应误差**最小**：

$$\begin{aligned} e^2 &= \int_{\theta \in \Theta} \int_{\omega \in \Omega} |B_d(\theta, \omega) - \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\theta, \omega)|^2 d\omega d\theta \\ &= \mathbf{w}^H Q \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w} + \sigma_d^2 \end{aligned}$$

其中 $Q = \int_{\theta \in \Theta} \int_{\omega \in \Omega} \mathbf{v}(\theta, \omega) \mathbf{v}^H(\theta, \omega) d\omega d\theta$

$$\mathbf{p} = \int_{\theta \in \Theta} \int_{\omega \in \Omega} \mathbf{v}(\theta, \omega) B_d^*(\theta, \omega) d\omega d\theta$$

$$\sigma_d^2 = \int_{\theta \in \Theta} \int_{\omega \in \Omega} |B_d(\theta, \omega)|^2 d\omega d\theta$$

而平方限制波束形成器则是对平方误差**进行限制**，即要求：

$$\mathbf{w}^H Q \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w} + \sigma_d^2 \leq e_m$$

其中 e_m 是最大可容许的平方误差。



把上式改写为：

$$(\mathbf{w} - Q^{-1}\mathbf{p})^H Q(\mathbf{w} - Q^{-1}\mathbf{p}) \leq e_0, \quad \text{其中 } e_0 = e_m - \sigma_d^2 + \mathbf{p}^H Q^{-1}\mathbf{p}。$$

或将之写为更一般的形式：

$$(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^H Q(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \leq e_0$$

可见这种限制是对加权系数的二次限制而非线性限制。

平方限制比特征值线性限制更具有一般意义，因为它不要求 Q 阵的某些特征值必须非常小。

当没有其它限制时，平方限制最小方差问题为：

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H R_x \mathbf{w} \quad s.t. \quad (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^H Q(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \leq e_0$$

利用拉格朗日乘子方法，可得其权矢量为：

$$\mathbf{w} = (R_x + \lambda Q)^{-1} R_x \mathbf{w}_0$$

其中 λ 是拉格朗日乘子， λ 的选择必须保证 \mathbf{w} 满足平方限制，即：

$$\mathbf{w}_0^H \left[(R_x + \lambda Q)^{-1} R_x - \mathbf{I} \right]^H Q_0 \left[(R_x + \lambda Q)^{-1} R_x - \mathbf{I} \right] \mathbf{w}_0 \leq e_0$$

从上式可见 λ 无法直接表示为 e_0 的函数，必须采用迭代算法才能求解 λ 。



在某些问题中，可以同时采用线性限制和平方限制，即：

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H R_{\mathbf{x}} \mathbf{w} \quad s.t. \quad C^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{且} \quad (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^H Q (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \leq e_0$$

当 e_0 非常小时，很可能找不到同时满足上面两种限制条件的 \mathbf{w} 。

当采用 GSC 方式实现 LCMV 时，可以去掉线性限制，此时，上面的目标函数为：

$$\min_{\mathbf{w}_n} (\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n)^H R_{\mathbf{x}} (\mathbf{w}_q - C_n \mathbf{w}_n) \quad s.t. \quad (C_n \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{oq})^H Q (C_n \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_{oq}) \leq e_0$$

同样采用拉格朗日乘子方法，我们可以得到：

$$\mathbf{w}_n = \left[C_n^H (R_{\mathbf{x}} + \lambda Q) C_n \right]^{-1} C_n^H (R_{\mathbf{x}} \mathbf{w}_q + \lambda Q \mathbf{w}_{oq})$$

上述平方限制在[3]中又被称为软限制。

从上面得到的权矢量可见，加入平方限制相当于对相关函数矩阵上加上了一个控制矩阵，当 $Q=I$ 时，所加的控制矩阵为对角阵，故这种平方限制又被称为对角线加载技术。



对角线加载技术被认为是一种**鲁棒**技术，使得空间滤波器能够在先验参数失配的情况下依然获得很好的性能。

由于参数失配包括阵簇矢量失配和谱失配，而**各种失配是对偶的**，解决一种失配问题的方法同样适用于解决另一种失配问题，所以在自适应算法中(谱失配)，它还可以提高收敛速度。

例 3：考虑一个 10 单元的均匀线阵， $d = \frac{\lambda}{2}$ 。

期望信号到达方向为 $\theta_0 = 0^\circ$ ，实际信号到达方向为 θ_s ，实际与期望信号到达方向存在 $\Delta\theta = \theta_s - \theta_0$ 的失配。

一个干扰信号的到达方向为 $\theta_1 = 5^\circ$ ， $\text{INR}=10\text{dB}$ 。

当 $Q=I$ 时，最优的对角线加载系数，以及相应的平方限制波束形成器的天线方向图分别如下图所示。



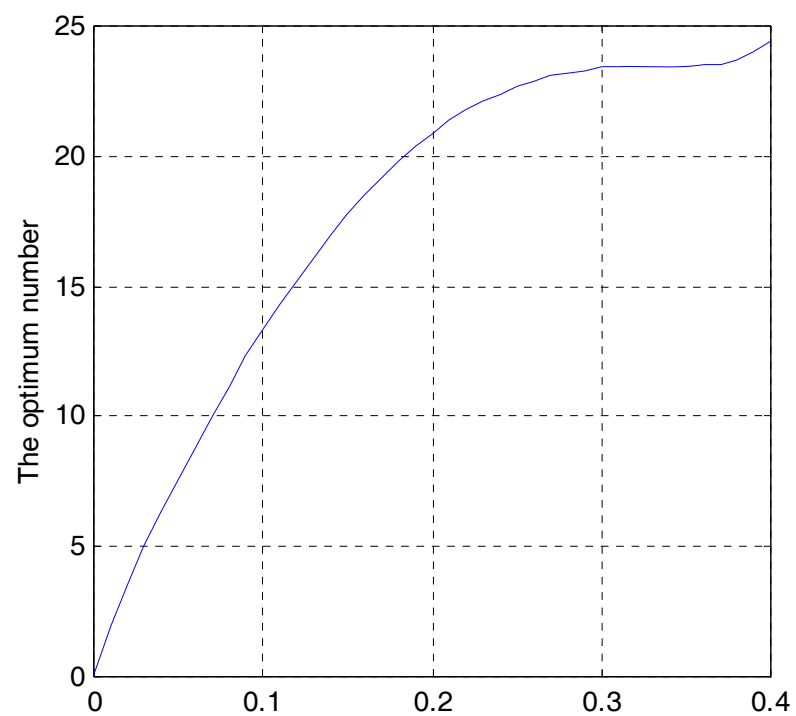


图 5(a) $\lambda_{\max} \sim \Delta\theta / \theta_{3dB}$ (SNR=10dB)

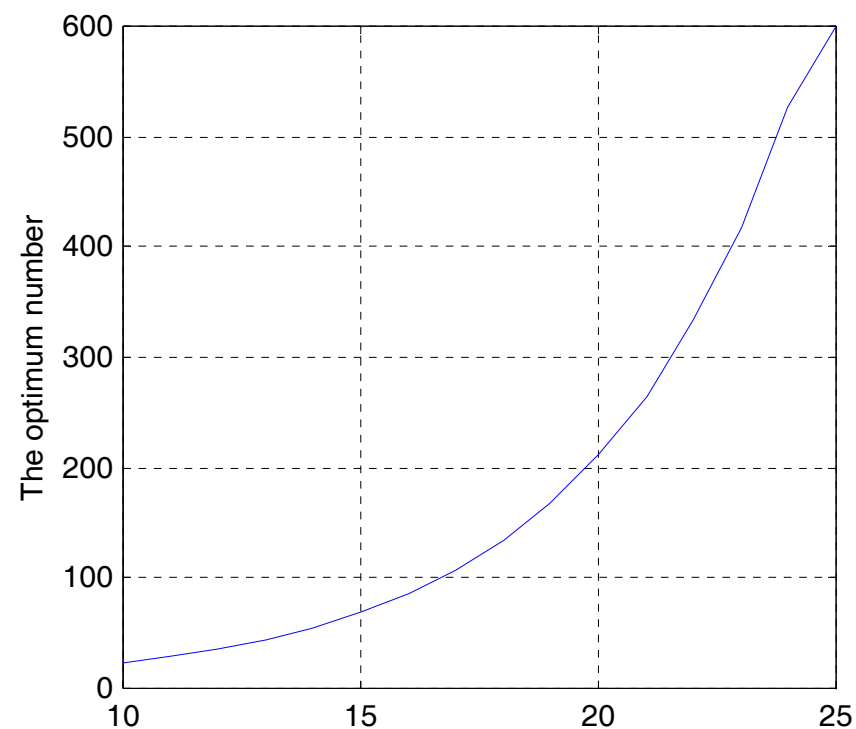


图 5(b) $\lambda_{\max} \sim$ 输入 SNR ($\Delta\theta / \theta_{3dB} = 0.3$)



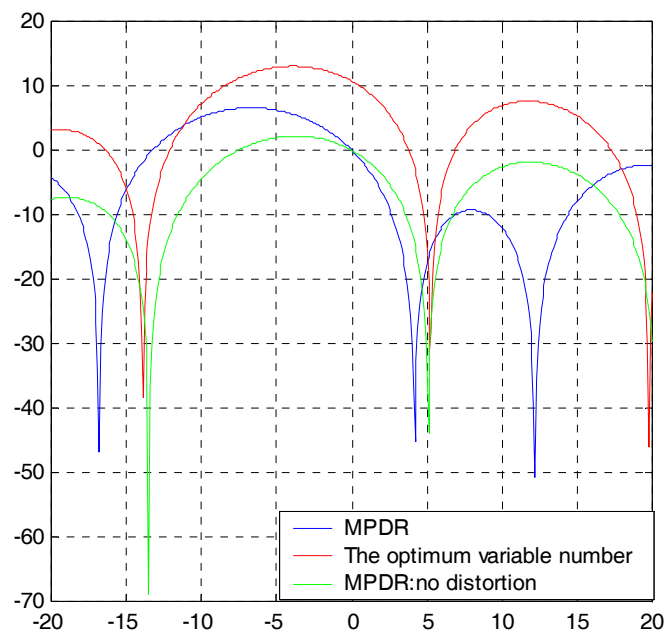


图 5(c) 天线方向图: $\theta_0 = 0^\circ$, 实际信号到达方向 θ_s , 干扰信号到达方向 $\theta_1 = 5^\circ$

几种波束形成器的输出 SINR:

无失配情况下 MPDR (绿色): 11.63dB

失配情况下 MPDR(蓝色): -0.92dB

失配情况下最优平方限制(红色): 9.77dB



§2.7 降维空间波束形成器

一、子空间波束形成器

1. 主分量(PC: Principal-Component)波束形成器

阵列接收频域快拍的谱矩阵为:

$$S_x = V \cdot S_f \cdot V^H + \sigma_w^2 \cdot I, \quad \text{其中 } V = [\mathbf{v}(\mathbf{k}_1) | \cdots | \mathbf{v}(\mathbf{k}_{D_r})] \text{ 为 } N \times D_r \text{ 维阵簇矩阵}$$

对 $N \times N$ 维空间谱矩阵进行特征分解:

$$S_x = \sum_{i=1}^N \lambda_i \Phi_i \Phi_i^H = U \Lambda U^H$$

其中空间谱矩阵的特征向量为 Φ_i , $i = 1, \dots, N$, 相应的特征值满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ 。

我们可以选择 D_r 个特征矢量构成 $N \times D_r$ 维特征矢量矩阵 U_r :

$$U_r = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_{D_r}]$$

相应的特征值对角阵为:

$$\Lambda_r = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_{D_r}]$$



若考虑单个平面波期望信号，以及 D 个平面波干扰信号和加性白噪声，则可以选择 $D_r = D + 1$ 个最大的特征值所对应的特征向量——**称为主分量**——为：

$$U_{S+I} = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_{D+1}] \quad \text{—— } N \times (D+1) \text{ 维特征矢量矩阵}$$

这些特征向量张成了**信号与干扰子空间**。用主分量表示谱矩阵：

$$S_x = U_{S+I} \Lambda_{S+I} U_{S+I}^H + U_N \Lambda_N U_N^H$$

其中 $U_N = [\Phi_{D+2} \quad \Phi_{D+3} \quad \cdots \quad \Phi_N]$ 张成了噪声子空间，与 U_{S+I} 正交。 $\Lambda_N = \sigma_w^2 \cdot I_{(N-D-1)}$ ， $\Lambda_{S+I} = \text{diag}\{\lambda_1^s + \sigma_w^2 \quad \cdots \quad \lambda_{D+1}^s + \sigma_w^2\}$ 为 $(D+1) \times (D+1)$ 维对角阵。

N 个特征值为： $\lambda_1^s + \sigma_w^2 \geq \lambda_2^s + \sigma_w^2 \geq \cdots \geq \lambda_{D+1}^s + \sigma_w^2 > \sigma_w^2 = \cdots \sigma_w^2$ 。

谱矩阵的逆阵为：

$$S_x^{-1} = U_{S+I} \Lambda_{S+I}^{-1} U_{S+I}^H + U_N \Lambda_N^{-1} U_N^H$$

当不存在失配时，由于模型阵簇矢量 \mathbf{v}_m 在信号与干扰子空间中(**→p16**)，故其与 U_N 正交。

因此，可以得到 MPDR 特征波束形成器的 N 维加权函数矢量为：

$$\mathbf{w}_{mpdr,es}^H = \left(\mathbf{v}_m^H \cdot S_x^{-1} \cdot \mathbf{v}_m \right)^{-1} \cdot \mathbf{v}_m^H \cdot S_x^{-1} = \gamma_{es} \mathbf{v}_m^H U_{S+I} \Lambda_{S+I}^{-1} U_{S+I}^H$$



其中 $\gamma_{es} = \left(\mathbf{v}_m^H U_{S+I} \Lambda_{S+I}^{-1} U_{S+I}^H \mathbf{v}_m \right)^{-1}$ 。

上式也可以用特征值和特征向量表示为：

$$\mathbf{w}_{mpdr,es}^H = \gamma_{es} \cdot \mathbf{v}_m^H \cdot U_r \Lambda_r^{-1} U_r^H = \frac{\sum_{i=1}^{D_r} \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{v}_m^H \Phi_i) \Phi_i^H}{\sum_{i=1}^{D_r} \frac{1}{\lambda_i} |\mathbf{v}_m^H \Phi_i|^2}$$

PC 波束形成器选择 D_r 个最大特征值对应的特征向量，而上述接收信号谱矩阵的特征值是接收信号在正交基上投影的能量，可见 **PC 波束形成器选择信号+干扰子空间的依据**是选择接收信号投影能量最大的正交基。若所选择的特征向量的个数 \hat{D}_r 小于信号和干扰的个数 D ，即子空间欠估计时，则所选择的子空间可能丢失期望信号的信息从而造成波束形成器性能的下降。这种 PC 降维波束形成器适用于高信噪比情况。

也可以从另外一个角度理解上述波束形成器。定义一个投影到 U_r 子空间的阵簇矢量：

$$\mathbf{v}_p \triangleq \mathbf{P}_{U_r} \mathbf{v}_m = U_r U_r^H \mathbf{v}_m$$

其中 $\mathbf{P}_{U_r} = U_r (U_r^H U_r)^{-1} U_r^H \xrightarrow{U_r^H U_r = I} U_r U_r^H$ 。



则投影波束形成器为：

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_p &= \gamma_p S_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{v}_p = \gamma_p S_{\mathbf{x}}^{-1} U_r U_r^H \mathbf{v}_m \\ &= \gamma_p \left[U_r \Lambda_r^{-1} U_r^H + U_N \Lambda_N^{-1} U_N^H \right] U_r U_r^H \mathbf{v}_m \\ &= \gamma_p \left[U_r \Lambda_r^{-1} U_r^H \right] \mathbf{v}_m\end{aligned}$$

若选择 $\gamma_p = \gamma_{es}$ ，则 \mathbf{w}_p 与 $\mathbf{w}_{mpdr,es}$ 完全相同。可见我们可以将 PC 波束形成器解释为一种在权矢量中采用了投影到 U_r 子空间的阵簇矢量的波束形成器。

降维处理解释：定义 $\mathbf{X}_{es(D_r \times 1)} = U_{r(D_r \times N)}^H \mathbf{X}_{(N \times 1)}$ 以及 $\mathbf{v}_{es(D_r \times 1)} = U_{r(D_r \times N)}^H \mathbf{v}_{m(N \times 1)}$ 分别为频域快拍和阵簇矢量在 U_r 子空间的展开系数，则 D_r 维波束形成器加权向量还可以写成：

$$\mathbf{w}_{mpdr,es}^H = \frac{\mathbf{v}_{es}^H \Lambda_r^{-1}}{\mathbf{v}_{es}^H \Lambda_r^{-1} \mathbf{v}_{es}}$$

可见波束形成器是在特征空间中完成的：由降维的阵簇矢量 \mathbf{v}_{es} 构成的降维加权向量 $\mathbf{w}_{mpdr,es}$ 对降维的接收信号 \mathbf{X}_{es} 进行处理得到波束形成器的输出。



相应的天线方向图为:

$$B(\psi) = \mathbf{w}_{mpdr,es}^H \mathbf{v}_{es}(\psi)$$

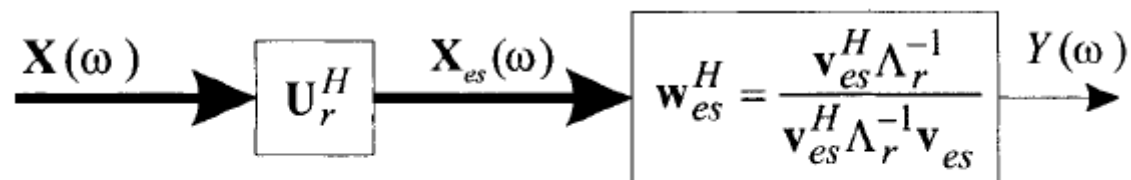


Figure 6.72 Eigenspace beamformer.

2. ~~互谱 (CS: Cross-Spectral)~~波束形成器

MPDR 波束形成器为在 $\mathbf{w}^H \mathbf{v}_m = 1$ 限制下使处理器输出的功率最小, 得到的权向量为:

$$\mathbf{w}^H = \frac{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1}}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{v}_m}$$

最小输出功率为:

$$P_O = \mathbf{w}^H \mathbf{S}_x \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1}}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{v}_m} \cdot \mathbf{S}_x \cdot \frac{\mathbf{S}_x^{-H} \mathbf{v}_m}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{v}_m} = \left(\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{v}_m \right)^{-1}$$



对接收信号谱矩阵进行特征分解，可得：

$$\mathbf{S}_x = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{\Phi}_i \mathbf{\Phi}_i^H$$

其逆阵为：

$$\mathbf{S}_x^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{\Phi}_i \mathbf{\Phi}_i^H}{\lambda_i}$$

利用特征值和特征向量表示的最小输出功率为：

$$P_O = \left(\mathbf{v}_m^H \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{\Phi}_i \mathbf{\Phi}_i^H}{\lambda_i} \mathbf{v}_m \right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{v}_m^H \mathbf{\Phi}_i|^2}{\lambda_i} \right)^{-1}$$

为了保留 D_c 个特征向量作为降秩子空间的基，选择上式求和项中最大的 D_c 项：

$$\lambda_{(n)}, \mathbf{\Phi}_{(n)} = \arg \max_{\lambda_i, \mathbf{\Phi}_i} \left\{ \frac{|\mathbf{v}_m^H \mathbf{\Phi}_i|^2}{\lambda_i} \right\}, (n) = 1, \dots, D_c$$



而后定义 $N \times D_c$ 维矩阵 $U_{cs} \triangleq [\Phi_1 \ \dots \ \Phi_{D_c}]$, 则 MPDR 波束形成器为:

$$\mathbf{w}_{cs}^H = \frac{\mathbf{v}_m^H U_{cs} \Lambda_{cs}^{-1} U_{cs}^H}{\mathbf{v}_m^H U_{cs} \Lambda_{cs}^{-1} U_{cs}^H \mathbf{v}_m} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{v}_m^H \Phi_i|^2}{\lambda_i} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{v}_m^H \Phi_i}{\lambda_i} \cdot \Phi_i^H$$

这样产生的波束形成器被称为互谱波束形成器。

$\frac{|\mathbf{v}_m^H \Phi_i|^2}{\lambda_i}$ 表示波束形成器输出能量在正交基 Φ_i 上投影的分量, 可见 **CS 方法选择使输出信号能量最大的正交基**。

$\mathbf{v}_m^H \Phi_i$ 可视为期望信号在正交基 Φ_i 上的投影 (反映了第 i 个特征向量与 \mathbf{v}_m 之间的相关性), 可见特征 MPDR 波束形成器的输出信号可以看成是接收信号在各正交基上投影的加权和, 加权系数与 $\mathbf{v}_m^H \Phi_i$ 成正比, 与 λ_i 成反比, 这意味着若期望信号投影到正交基 Φ_i 上的比例大、而接收信号投影在该正交基上的能量小——表明在接收信号投影到正交基 Φ_i 上的期望信号成分多、干扰信号成分少, 则加权系数大。可见 CS 降维 MPDR 波束形成器在选择子空间时, 综合考虑了期望信号与干扰信号在各正交基上投影的比例, 可以得到在最小输出功率意义上最优的子空间。

若存在失配, 则上述最优性不再成立, CS 降维 MPDR 波束形成器的性能将急剧下降。



3. 主模式抑制(DMR: Dominant Mode Rejection)波束形成器

对谱矩阵进行特征分解，并将其分为两项：

$$S_x = \sum_{i=1}^{D_m} \lambda_i \Phi_i \Phi_i^H + \sum_{i=D_m+1}^N \lambda_i \Phi_i \Phi_i^H$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ 。

将谱矩阵中 $N - D_m$ 个最小的特征值用其平均值代替，可得新的谱矩阵为：

$$\tilde{S}_x \triangleq \sum_{i=1}^{D_m} \lambda_i \Phi_i \Phi_i^H + \alpha \sum_{i=D_m+1}^N \Phi_i \Phi_i^H$$

其中 $\alpha \triangleq \frac{1}{N - D_m} \sum_{i=D_m+1}^N \lambda_i = \frac{1}{N - D_m} \left\{ \text{tr}[S_x] - \sum_{i=1}^{D_m} \lambda_i \right\}$ 。若考虑空间白噪声中的平面波信号和干扰，

则 $\alpha = \sigma_w^2$ 。

把与 D_m 个最大的特征值所对应的 D_m 个特征向量称为主模式，他们来源于信号和干扰。用下述 $N \times D_m$ 维矩阵表示主模式子空间：



$$U_{dm} \triangleq [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_{dm}]$$

与其正交的噪声子空间为:

$$U_{dm}^\perp \triangleq [\Phi_{dm+1} \quad \Phi_{dm+2} \quad \cdots \quad \Phi_N]$$

则新的谱矩阵还可以表示为:

$$\tilde{S}_x = \sum_i^{D_m} \lambda_i \Phi_i \Phi_i^H + \alpha U_{dm}^\perp [U_{dm}^\perp]^H$$

其逆矩阵为:

$$\tilde{S}_x^{-1} = \sum_i^{D_m} \frac{1}{\lambda_i} \Phi_i \Phi_i^H + \frac{1}{\alpha} U_{dm}^\perp [U_{dm}^\perp]^H = \frac{1}{\alpha} \left[\sum_{i=1}^{D_m} \frac{\alpha}{\lambda_i} \Phi_i \Phi_i^H + P_{dm}^H \right]$$

其中 $P_{dm}^\perp = I - U_{dm} (U_{dm}^H U_{dm})^{-1} U_{dm}^H$ 为投影到与 U_{dm} 空间正交的子空间上的投影矩阵。

把上面新的谱矩阵带入 MPDR 波束形成器的加权函数中, 可得:



$$\mathbf{w}_{dm}^H = \frac{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1}}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{v}_m} = \frac{\alpha \sum_{i=1}^{D_m} \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\Phi}_i) \boldsymbol{\Phi}_i^H + \mathbf{v}_m^H \mathbf{P}_{dm}^\perp}{\alpha \sum_{i=1}^{D_m} \frac{1}{\lambda_i} |\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\Phi}_i|^2 + \mathbf{v}_m^H \mathbf{P}_{dm}^\perp \mathbf{v}_m}$$

若模型阵簇矢量完全包含在主模式子空间中，即不存在失配时，有：

$$\mathbf{v}_m^H \mathbf{P}_{dm}^\perp = 0$$

此时 MPDR 波束形成器的加权函数为：

$$\mathbf{w}_{dm}^H = \frac{\sum_{i=1}^{D_m} \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\Phi}_i) \boldsymbol{\Phi}_i^H}{\sum_{i=1}^{D_m} \frac{1}{\lambda_i} |\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\Phi}_i|^2} \xrightarrow{\text{if } D_m = D_r} = \mathbf{w}_{mpdr,es}^H$$

为了分析由一个特征向量形成的响应，下面把特征值分成信号和噪声项：

$$\lambda_i = \lambda_i^s + \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, D_m$$



则当谱矩阵为 $S_x = \lambda_k \Phi_k \Phi_k^H$ 时输出功率为:

$$P_{\Phi_k} = \mathbf{w}_{dm}^H S_x \mathbf{w}_{dm} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_k^s / \alpha + 1} \right) |\mathbf{v}_m^H \Phi_k|^2}{\left[\sum_{i=1}^{D_m} \left(\frac{1}{\lambda_k^s / \alpha + 1} \right) |\mathbf{v}_m^H \Phi_i|^2 \right]^2}$$

可见若 $\lambda_k^s / \alpha \gg 1$, 则由第 k 个主模式引起的输出 P_{Φ_k} 非常小, 即将被波束形成器抑制掉。因此, 这种波束形成器被称为主模式抑制波束形成器。 $\mathbf{v}_m^H \Phi_k$ 反映了第 k 个特征向量与 \mathbf{v}_m 之间的相关性, 相关性越强, 则对第 k 个主模式形成的零陷越浅。

可见, 这种 DMR 波束形成器适用于低信噪比情况, 信号不能在主模式子空间中。 D_m 应选为干扰的个数。

■ 特征波束:

¹⁰ An eigenbeam is a beam obtained when the Hermitian transpose of an eigenvector is used as the weight vector.



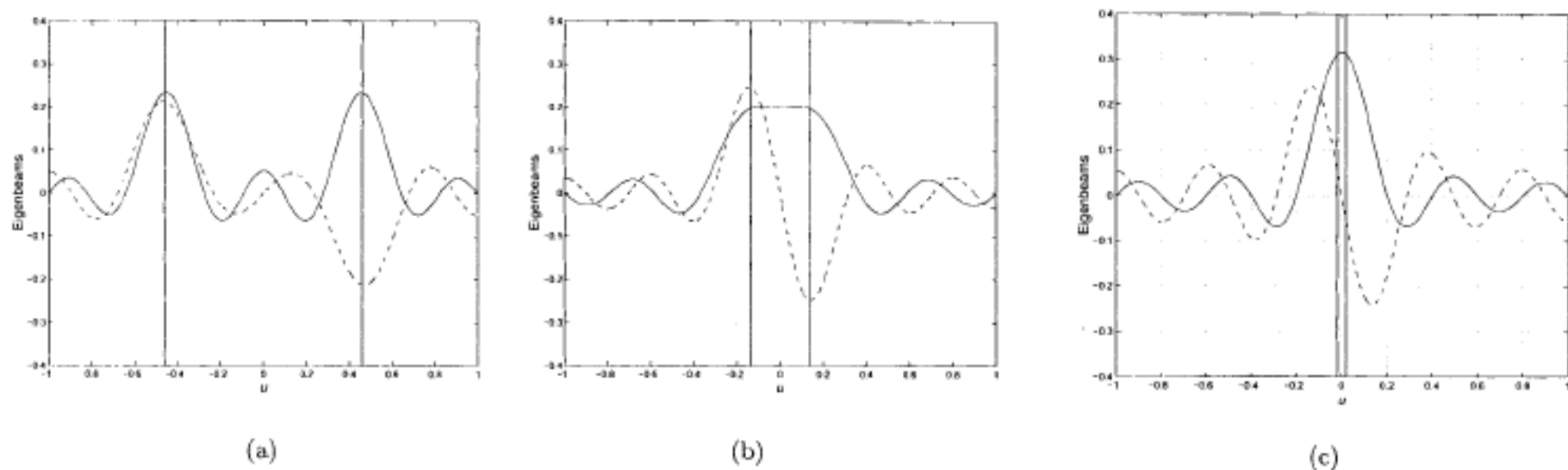


Figure 5.11 Eigenbeams for the two directional signals case: 10-element standard linear array (a) $\Delta u = 2.3BW_{NN}$; (b) $\Delta u = 0.68BW_{NN}$; (c) $\Delta u = 0.1BW_{NN}$.

二、波束域波束形成器

第二种降维的方法是首先形成若干非自适应波束形成器，而后对这些自适应波束形成器进行最优处理构成波束形成器的输出——即波束域波束形成器。



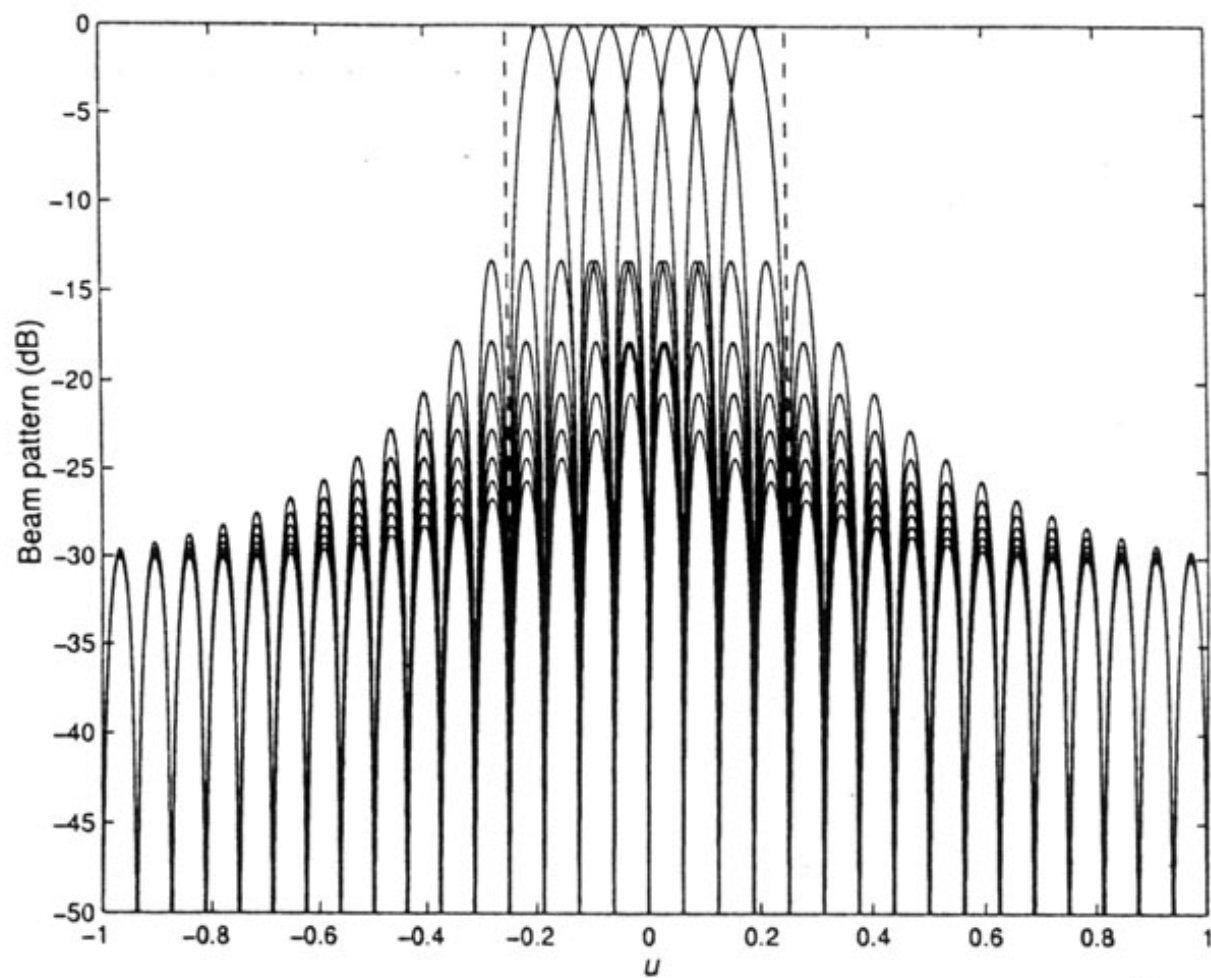


图 6 波束域处理器的正交波束



图 6 是一个由 32 个单元组成的标准线阵，以 $u_s = 0$ 为中心形成 7 个传统的互相正交的波束，形成其中第 m 个波束的加权向量为 $\mathbf{b}_{bs,m}$, $m = 1, \dots, 7$, 在此例中：

$$\mathbf{b}_{bs,m} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{v} \left(u - (m-4) \frac{2}{N} \right), \quad m = 1, \dots, 7$$

对于标准均匀加权的线阵，每一个加权函数为：

$$[\mathbf{b}_{bs,i}]_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[e^{-j \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \left(\psi_c - (m-4) \frac{2\pi}{N} \right)} \right], \quad n = 0, \dots, N-1, \quad m = 1, 2, \dots, 7$$

其中 $\mathbf{v}(u)$ 维 u 域中的阵簇矢量， ψ_c 为中心波束的指向。

对于其它非均匀加权的线阵，每一个加权函数为：

$$[\mathbf{b}_{bs,i}]_n = w_n^* \left[e^{-j \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \left(\psi_c - (m-4) \frac{2\pi}{N} \right)} \right], \quad n = 0, \dots, N-1, \quad m = 1, 2, \dots, 7$$

定义一个 $N \times N_{bs}$ 维矩阵 $B_{bs} = [\mathbf{b}_{bs,1} \quad \dots \quad \mathbf{b}_{bs,N_{bs}}]$, $B_{bs}^H \cdot B_{bs} = I$ 。上例中 $N_{bs} = 7$ 。



传感器阵接收的频域快拍经过上述波束形成矩阵后的输出即为波束域的频域快拍：

$$\mathbf{X}_{bs(N_{bs} \times 1)} = \mathbf{B}_{bs(N_{bs} \times N)}^H \cdot \mathbf{X}_{(N \times 1)}$$

在波束域的阵簇矢量为：

$$\mathbf{v}_{bs(N_{bs} \times 1)} = \mathbf{B}_{bs(N_{bs} \times N)}^H \cdot \mathbf{v}_{s(N \times 1)}$$

其中 $[\mathbf{v}_s]_n = e^{-j\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}$, $n = 0, \dots, N-1$ 。

对波束域的频域快拍进行最优加权，其输出为：

$$Y = \mathbf{w}_{bs(1 \times N_{bs})}^H \cdot \mathbf{X}_{bs(N_{bs} \times 1)} = \mathbf{w}_{bs}^H \cdot \mathbf{B}_{bs}^H \cdot \mathbf{X}$$

相应的天线方向图为：

$$B(\psi) = \mathbf{w}_{bs}^H \mathbf{v}_{bs}(\psi)$$

波束域的空间谱矩阵为：

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}_{bs}} = \mathbf{B}_{bs}^H \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}_{bs}$$



对于相关干扰和白噪声中的单个平面波信号，谱矩阵为：

$$S_{\mathbf{x}} = \sigma_s^2 \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s^H + S_{\mathbf{c}} + \sigma_w^2 \cdot I$$

此时波束域的空间谱矩阵为：

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}_{bs}} &= \sigma_s^2 \cdot B_{bs}^H \cdot \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s^H \cdot B_{bs} + B_{bs}^H \cdot S_{\mathbf{c}} \cdot B_{bs} + \sigma_w^2 \cdot B_{bs}^H \cdot B_{bs} \\ &= \sigma_s^2 \cdot \mathbf{v}_{bs} \mathbf{v}_{bs}^H + B_{bs}^H \cdot S_{\mathbf{c}} \cdot B_{bs} + \sigma_w^2 \cdot I \end{aligned}$$

若相关干扰包括 D 个平面波信号，则：

$$S_{\mathbf{c}} = VS_I V^H$$

波束域的空间谱矩阵为：

$$S_{\mathbf{x}_{bs}} = \sigma_s^2 \cdot B_{bs}^H \cdot \mathbf{v}_s \mathbf{v}_s^H \cdot B_{bs} + B_{bs}^H \cdot VS_I V^H \cdot B_{bs} + \sigma_w^2 \cdot B_{bs}^H \cdot B_{bs} = \sigma_s^2 \cdot \mathbf{v}_{bs} \mathbf{v}_{bs}^H + V_{bs} \cdot S_I \cdot V_{bs}^H + \sigma_w^2 \cdot I$$

波束域波束形成器的最优 MPDR 加权向量为：

$$\mathbf{w}_{MDPR,bs}^H = \frac{\mathbf{v}_{bs}^H S_{\mathbf{x}_{bs}}^{-1}}{\mathbf{v}_{bs}^H S_{\mathbf{x}_{bs}}^{-1} \mathbf{v}_{bs}}$$



三、降维处理

阵列接收信号 \mathbf{x} 经降维转换 T ($N \times D$ 维且 $D \leq N$) 矩阵后, 降维接收信号矢量为:

$$\mathbf{x}_T = T^H \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \text{特征空间降维: } T = U_r = U_{S+I}, \quad \text{波束域降维: } T = B_{bs}$$

降维阵簇矢量为:

$$\mathbf{v}_T = T^H \mathbf{v}$$

降维接收信号相关矩阵为:

$$R_T = T^H R T$$

对于降维处理后的接收数据求最佳权向量 \mathbf{w}_T 为:

$$\mathbf{w}_T = \mu \cdot R_T^{-1} \mathbf{v}_T$$

该权矢量由原来的 N 维降低为 D 维。

全维处理器与降维处理器权向量间的关系为:

$$\mathbf{w} = T \mathbf{w}_T = T R_T^{-1} \mathbf{v}_T = T (T^H R T)^{-1} T^H \mathbf{v}$$



§ 2.8 相关源的波束形成器

一、源统计相关对波束形成器的影响

传感器阵接收的频域快拍为：

$$\mathbf{X}(\omega) = V\mathbf{F}(\omega) + \mathbf{N}(\omega)$$

其空间谱矩阵为：

$$S_{\mathbf{x}} = VS_{\mathbf{f}}V^H + \sigma_w^2 \cdot I$$

其中 $\mathbf{F}(\omega)$ 为一个 D 维零均值随机矢量，包括信号和干扰， V 为 $N \times D$ 维阵簇矩阵，加性空间白噪声 $N(\omega)$ 与信号和干扰不相关。

下面以只有一个信号 $F_d(\omega)$ 和一个干扰 $F_I(\omega)$ 的情况为例，分析统计相关性的影响。

此时信号谱矩阵为：

$$S_{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s \sigma_I \rho \\ \sigma_s \sigma_I \rho^* & \sigma_I^2 \end{bmatrix}$$



若期望信号和干扰信号统计上完全相关（相干），即 $\rho = \frac{S_{12}}{\sqrt{S_1 S_2}}$ 满足 $|\rho| = 1$ ，则上述信号谱矩阵为奇异矩阵，即 $|S_f| = 0$ 。

下面分析 MPDR 波束形成器的性能随 ρ 变化的规律。

对于 MPDR 波束形成器，加权向量满足： $\mathbf{w}^H \mathbf{v}_s = 1$ 。当期望信号与干扰不相关时，上述无失真条件等价于期望信号的最小方差无偏估计准则，即 $E\{Y(\omega)\} = F(\omega)$ 。

把干扰 $F_I(\omega)$ 分成与期望信号 $F_d(\omega)$ 相关和不相关的两部分：

$$\mathbf{X}(\omega) = \sigma_s F_d(\omega) \mathbf{v}_s + \sigma_I \left[\rho^* F_d(\omega) + \sqrt{1 - |\rho|^2} F_u(\omega) \right] \mathbf{v}_I + \mathbf{N}(\omega)$$

则波束形成器的输出为：

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathbf{w}^H \sigma_s F_d(\omega) \mathbf{v}_s + \mathbf{w}^H \sigma_I \left[\rho^* F_d(\omega) + \sqrt{1 - |\rho|^2} F_u(\omega) \right] \mathbf{v}_I + \mathbf{w}^H \mathbf{N}(\omega) \\ &= \left[\mathbf{w}^H \mathbf{v}_s \sigma_s + \mathbf{w}^H \mathbf{v}_I \sigma_I \rho^* \right] F_d(\omega) + \mathbf{w}^H \mathbf{v}_I \sigma_I \sqrt{1 - |\rho|^2} F_u(\omega) + \mathbf{w}^H \mathbf{N}(\omega) \triangleq Y_d(\omega) + Y_I(\omega) + Y_n(\omega) \end{aligned}$$

其中这三项不相关。



期望信号的输出功率为:

$$\begin{aligned}
 P_{do} &= E[Y_d(\omega)Y_d^*(\omega)] \\
 &= [\mathbf{w}^H \mathbf{v}_s \sigma_s + \mathbf{w}^H \mathbf{v}_I \sigma_I \rho^*] \cdot [\mathbf{v}_s^H \mathbf{w} \sigma_s + \mathbf{v}_I^H \mathbf{w} \sigma_I \rho] \\
 &= \sigma_s^2 \left| \alpha_s + \alpha_I \frac{\sigma_I \rho^*}{\sigma_s} \right|^2
 \end{aligned}$$

其中 $\alpha_s \triangleq \mathbf{w}^H \mathbf{v}_s$, $\alpha_I \triangleq \mathbf{w}^H \mathbf{v}_I$ 。

对于 MPDR 波束形成器, $\alpha_s = 1$, 期望信号的输出功率为:

$$P_{do} = \sigma_s^2 \left| 1 + \alpha_I \frac{\sigma_I \rho^*}{\sigma_s} \right|^2$$

干扰信号的输出功率为:

$$P_{Io} = E[Y_I(\omega)Y_I^H(\omega)] = |\alpha_I|^2 (1 - |\rho|^2) \sigma_I^2$$

噪声的输出功率为:



$$P_{no} = \sigma_{\omega}^2 \|\mathbf{w}\|^2$$

输出信干噪比为:

$$SNR_o = \frac{P_{do}}{P_{Io} + P_{no}}$$

将加权向量和上述期望信号、干扰信号和噪声的输出功率带入输出信干噪比中, 有:

$$SNR_o = \frac{A}{B}$$

$$\text{其中 } A = \left| \sigma_s \sigma_I^2 \Gamma \Delta + \sigma_{\omega}^2 (N \sigma_s + \rho^* N B_{dI}^* \sigma_I) \right|^2$$

$$B = \sigma_s^2 \sigma_I^4 \Gamma |\rho|^2 \Delta^2 + \sigma_I^2 \sigma_{\omega}^2 \Delta \left[N \sigma_s^2 |\rho|^2 + N \sigma_I^2 + |\rho|^2 \sigma_s \sigma_I N (\rho^* B_{dI}^* + \rho B_{dI}) + 2 \sigma_{\omega}^2 \right] \\ + N^2 \sigma_I^2 \sigma_{\omega}^4 |B_{dI}|^2 \Gamma + N \sigma_{\omega}^6$$

$$\Gamma = 1 - |\rho|^2, \quad B_{dI} = \frac{1}{N} \mathbf{v}_I^H \mathbf{v}_s \quad (\text{信号与干扰的空间相关}), \quad \Delta = N^2 (1 - |B_{dI}|^2)。$$



考虑如下几个极限情况：

1) $\sigma_w^2 = 0$ (信噪比 $\rightarrow \infty$)、 $|\rho| = 1$ (干扰与期望信号完全相关)，则对输出信噪比利用罗彼塔法则可得 $SNR_o = 0$ ，即期望信号的输出功率为 0。

2) 当信噪比和信干比很高，且干扰位于旁瓣，则输出信噪比为：

$$SNR_o \cong \frac{\Gamma^2 \cdot \sigma_s^2}{\Gamma \cdot |\rho|^2 \sigma_s^2 + \frac{\sigma_w^2}{N}}$$

当 $|\rho| = 1$ 时， $SNR_o = 0$ ，期望信号被当作干扰完全抑制了。

3) 若干扰位于主瓣， $|B_{dl}| \approx 1$ ，则输出信噪比为：

$$SNR_o \cong \frac{\sigma_s^2 \cdot \left| 1 + \rho^* \frac{\sigma_I}{\sigma_s} \right|^2}{\sigma_I^2 (1 - |\rho|^2) + \frac{\sigma_w^2}{N}}$$

当 $|\rho| = 1$ 时， $SNR_o \cong \frac{[\sigma_s + \sigma_I]^2}{\sigma_w^2 / N}$ ，干扰信号被当作期望信号完全保留了。



二、空间平滑和前向-后向平均

下面通过空间平滑消除信号与干扰之间的相干所造成的信号谱矩阵 S_f 的奇异性。空间平滑技术要求阵列几何是规则的，例如为均匀线阵。

考虑由 N 个阵元组成的标准均匀线阵，如图 7(a) 所示。传感器阵接收的频域快拍为：

$$\mathbf{X}(\omega) = V\mathbf{F}(\omega) + \mathbf{N}(\omega)$$

其谱矩阵为：

$$S_x = VS_fV^H + \sigma_w^2 \cdot I$$

其中 S_f 为源谱矩阵，假设为奇异矩阵，即 $|S_f| = 0$ 。

假设已知源信号（期望信号+干扰）的个数为 D 。

由 N 个阵元组成的均匀线阵构成 L 个子阵，每个子阵中包含 $M \geq D+1$ 个阵元，如图 7(b) 所示。

各个子阵相对于前一个子阵移位一个阵元。第 i 个子阵的起始阵元为第 i 个阵元。



以位于原点的子阵作为参考子阵。

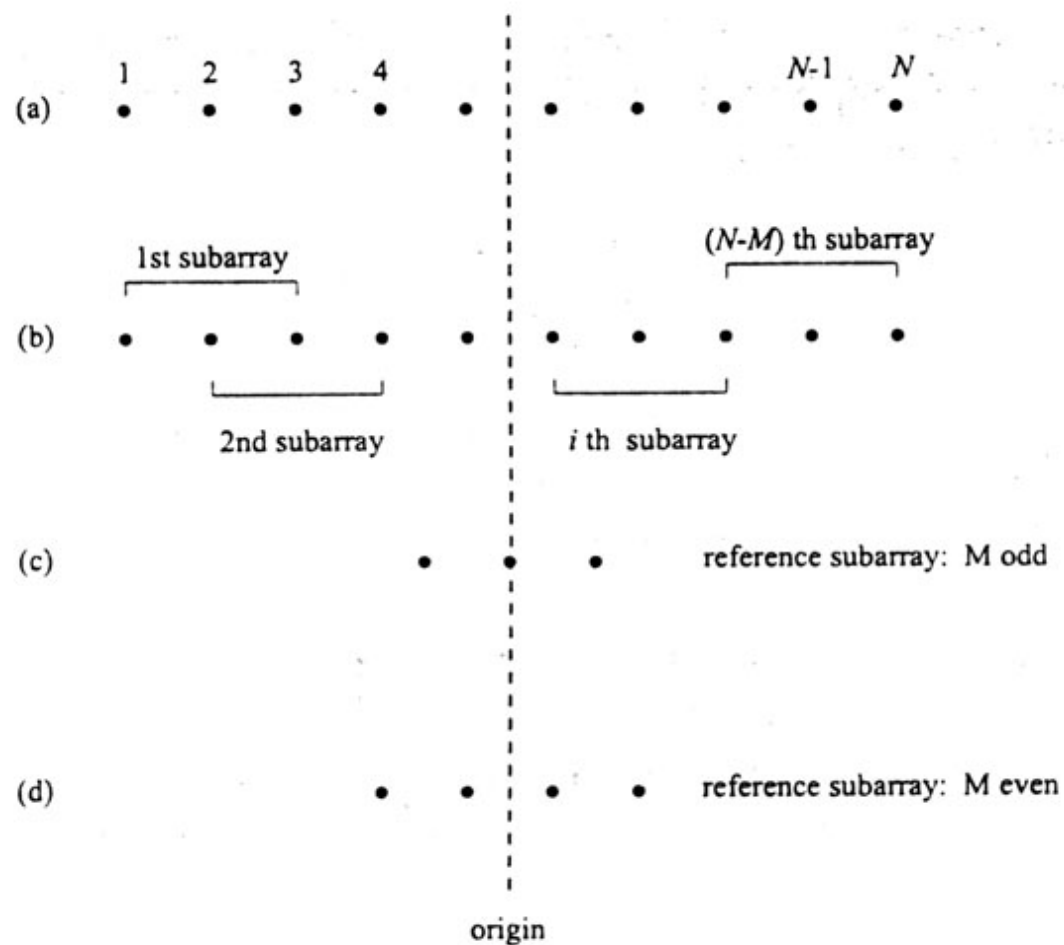


图 7 (a)线阵 (b)子阵 (c)参考子阵, M 为奇数 (d) 参考子阵, M 为偶数



令 $V_M = [\mathbf{v}_M(\psi_1) \cdots \mathbf{v}_M(\psi_D)]$ 表示长度为 M 的子阵的定向矢量集，其中：

$$\mathbf{v}_M(\psi) = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{M-1}{2}\psi} & \cdots & e^{j\frac{M-1}{2}\psi} \end{bmatrix}$$

定义：

$$D = \text{diag}[e^{j\psi_1} : e^{j\psi_2} : \cdots : e^{j\psi_D}]$$

则把在第 i 个子阵处接收信号的谱矩阵称为第 i 个子阵的前向谱矩阵：

$$S_{MF}^{(i)} = V_M D^{\frac{M-N}{2} + (i-1)} S_f \left[D^{\frac{M-N}{2} + (i-1)} \right]^H V_M^H + \sigma_\omega^2 I$$

第 i 个子阵接收信号的后向谱矩阵定义为：

$$S_{MB}^{(i)} = J [S_{MF}^{(i)}]^* J$$

其中 $J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 为交换矩阵。



即后向谱矩阵可以表示为:

$$S_{MB}^{(i)} = J V_M^* \left[D^{\frac{M-N}{2} + (i-1)} \right]^* S_f^* \left[D^{\frac{M-N}{2} + (i-1)} \right]^{*H} V_M^{*H} J + \sigma_\omega^2 I$$

因为:

$$J V_M^* = V_M$$

所以:

$$S_{MB}^{(i)} = V_M \left[D^{\frac{M-N}{2} + (i-1)} \right]^* S_f^* \left[D^{\frac{M-N}{2} + (i-1)} \right]^{*H} V_M^H + \sigma_\omega^2 I$$

对各子阵的前向、后向谱矩进行加权平均, 可以得到平滑谱矩阵为:

$$S_{SSFB} = \sum_{i=1}^L w_i \left\{ \frac{1}{2} (S_{MF}^{(i)} + S_{MB}^{(i)}) \right\}$$

考虑均匀加权, 平滑谱矩阵为:



$$S_{SSFB} = \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^L \left\{ \frac{1}{2} (S_{MF}^{(i)} + S_{MB}^{(i)}) \right\}$$

由于 $D^* = D^{-1}$ ，故：

$$S_{SSFB} = V_M \left[\frac{1}{2L} \sum_{i=1}^L \left\{ D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} S_{\mathbf{f}} \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^H + \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^* S_{\mathbf{f}}^* \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^{*H} \right\} \right] V_M^H + \sigma_{\omega}^2 I$$

定义上式中括号中的项为经前后向平滑后的信号：

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{f},SSFB} &= \frac{1}{2L} \sum_{i=1}^L \left(D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} S_{\mathbf{f}} \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^H + \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^* S_{\mathbf{f}}^* \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^{*H} \right) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \operatorname{Re} \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} S_{\mathbf{f}} \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^H \right] \end{aligned}$$

则接收信号平滑谱矩阵为：

$$S_{SSFB} = V_M S_{\mathbf{f},SSFB} V_M^H + \sigma_{\omega}^2 I$$



若不进行前向后向平均，只进行前向平均，则源信号的平滑谱矩阵为：

$$S_{\mathbf{f},SS} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} S_{\mathbf{f}} \left[D^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^H$$

接收信号平滑谱矩阵为：

$$S_{SS} = V_M S_{\mathbf{f},SS} V_M^H + \sigma_{\omega}^2 I$$

下面我们分析经过上述平均处理后两个源的相关系数。考虑只对 L 个子阵进行前向平滑的均匀加权，则源信号的平滑谱矩阵为：

$$\left[S_{\mathbf{f},SS}^{(L)} \right]_{ij} = S_{ij} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L D_{ii}^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \left[D_{jj}^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^*$$

当 $i = j$ 时，

$$\left[S_{\mathbf{f},SS}^{(L)} \right]_{ij} = S_{ii}$$

当 $i \neq j$ 时，



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L D_{ii}^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \left[D_{jj}^{\frac{M-N}{2}+(i-1)} \right]^* \\
&= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L e^{j \frac{M-N}{2} (\psi_i - \psi_j)} e^{j(l-1)(\psi_i - \psi_j)} \\
&= e^{j \frac{M-N}{2} \Delta \psi_{ij}} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L e^{jm \Delta \psi_{ij}} \\
& [S_{f,SS}^{(L)}]_{ij} = S_{ij} \cdot e^{j \frac{M-N}{2} \Delta \psi_{ij}} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L e^{jm \Delta \psi_{ij}}
\end{aligned}$$

对于两个相关系数为 ρ 的源，当 $i \neq j$ 时，只进行前向平滑后这两个源的相关系数为：

$$\rho_F^{(L)} = \frac{[S_{f,SS}^{(L)}]_{12}}{\sqrt{S_{11}S_{22}}} = \frac{\rho}{L} \frac{\sin\left(\frac{L\Delta\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)} e^{-j \frac{L-1}{2} \Delta\psi} e^{-j \frac{M-N}{2} \Delta\psi} = \frac{\rho}{L} \frac{\sin\left(\frac{L\Delta\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)}, \text{ 其中 } \Delta\psi = \Delta\psi_{12}。$$

类似地，对于两个源的情况，当 $i \neq j$ 时，可以得到进行前后向平滑时的相关系数为：



$$[S_{\mathbf{f},SSFB}^{(L)}]_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \operatorname{Re} \left[[S_{\mathbf{f}}]_{ij} e^{j \left(\frac{M+N}{2} + (l-1) \right) \Delta \psi_{ij}} \right], \text{ 其中 } \Delta \psi_{ij} = \psi_i - \psi_j。$$

$$\rho_{FB}^{(L)} = \frac{\operatorname{Re}[\rho]}{L} \frac{\sin\left(\frac{L\Delta\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)}$$

可见前向-后向平滑的效果是用 $\operatorname{Re}[\rho]$ 代替了 $\rho = |\rho|e^{j\phi}$ 。

采用上述空间平滑方法解决信号相关性问题的之后，下面的**第一个问题**是子阵个数 L 如何取值才能解相关，即让 $\rho_{FB}^{(L)}$ 或 $\rho_F^{(L)}$ 为零。

Pillai 等人证明，选择 $L \geq D/2$ 可以保证 $S_{\mathbf{f},SSFB}$ 非奇异矩阵。

当子阵中的单元个数 $M \geq D+1$ 且 $N = L + M - 1$ 时，需要 $N \geq \frac{D}{2} + D$ 即 $N \geq \frac{3D}{2}$ 才能保证 $S_{\mathbf{f},SSFB}$ 非奇异矩阵。

另外一个问题是作为 L 的函数， $S_{\mathbf{f},SSFB}$ 和 $S_{\mathbf{f},SS}$ 以多快的速度趋于对角阵（ $\rho_F^{(L)}$ 或 $\rho_{FB}^{(L)}$ 趋于 0 的速度）。



§ 2.9 小结

◆ 频域/时域快拍模型

把整个观测间隔 T 分为 K 个长度为 ΔT 的时间间隔, 对于阵列接收信号 $\mathbf{x}(t)$ 在这些时间间隔上进行如下的积分, 可得到由在频率 ω_m 处的复利叶级数组成的复向量, 即为频域快拍:

$$\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta T}} \int_{(k-1)\Delta T}^{k\Delta T} \mathbf{x}(t) e^{-j(\omega_c + m\omega_\Delta)t} dt$$

若有一个平面波期望信号和 $D-1$ 个平面波干扰信号, 则阵列接收信号的频域快拍为:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k) &= \mathbf{v}(\omega_m, \mathbf{k}_s) F_{s, \Delta T}(\omega_m, k) + \sum_{i=1}^{D-1} \mathbf{v}(\omega_m, \mathbf{k}_i) F_{i, \Delta T}(\omega_m, k) + \mathbf{N}_{\Delta T}(\omega_m, k) \\ &= \mathbf{V}(\omega_m, \mathbf{k}) \mathbf{F}_{\Delta T}(\omega_m, k) + \mathbf{N}_{\Delta T}(\omega_m, k) \end{aligned}$$

不同频率段的频域快拍 $\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_{m1}, k)$ 与 $\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_{m2}, k)$ 统计独立的 ($\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega_m, k) \rightarrow \mathbf{X}_{\Delta T}(\omega, k)$)

+ 空间谱已知且对每个快拍都相同 ($\mathbf{X}_{\Delta T}(\omega, k) \rightarrow \mathbf{X}_{\Delta T}(\omega)$)

+ $B_s \cdot \Delta T \geq 16$:

$\Rightarrow \mathbf{X}_{\Delta T}(\omega) \rightarrow \mathbf{X}(\omega)$



空间谱矩阵为:

$$S_{\mathbf{x}} = V \cdot S_{\mathbf{f}} \cdot V^H + S_{\mathbf{n}}$$

信号谱矩阵一般非对角阵。例如当只有一个信号和一个干扰时, 信号谱矩阵为:

$$S_{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s \sigma_I \rho \\ \sigma_s \sigma_I \rho^* & \sigma_I^2 \end{bmatrix},$$

其中 $\rho = S_{12} / \sqrt{S_1 S_2}$ 为信号与干扰之间的时间相关。

当信号和各个干扰之间不相关时, $S_{\mathbf{f}} = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_D^2\}$; 当噪声为空间白噪声时, $S_{\mathbf{n}} = \sigma_w^2 \cdot I$ 。

对于一个窄带平面波期望信号和 $D-1$ 个窄带平面波干扰信号, 对 $\mathbf{x}(t)$ 以 $1/B_s$ 进行采样, 即可得到阵列接收信号的时域快拍模型:

$$\mathbf{x}(k) = V(\mathbf{k})\mathbf{f}(k) + \mathbf{n}(k)$$

空间相关矩阵为:

$$R_{\mathbf{x}}(\tau) = V \cdot R_{\mathbf{f}}(\tau) \cdot V^H + \sigma_w^2 \cdot \delta(\tau)$$



◆ 最优波束形成器

- MMSE 波束形成器： 需要时间参考信号 $d(t)$ 及接收信号的二阶统计量

$$\mathbf{w}_{MSE} = R_{\mathbf{x}}^{-1} R_{d\mathbf{x}}, \quad \text{其中 } R_{d\mathbf{x}} = E\{d^*(t)\mathbf{x}(t)\}, \quad R_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\}。$$

- MVDR 波束形成器： 需要空间参考信号 \mathbf{v}_s 及噪声的二阶统计量

$$\mathbf{w}_{MVDR} = \Lambda \cdot R_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \text{其中 } \Lambda = \frac{1}{\mathbf{v}_s^H \cdot R_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_s}。$$

- MPDR 波束形成器： 需要空间参考信号 \mathbf{v}_s 及接收信号的二阶统计量

$$\mathbf{w}_{MPDR} = \Lambda \cdot R_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \text{其中 } \Lambda = \frac{1}{\mathbf{v}_s^H \cdot R_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_s}。$$

- SIR 波束形成器： 需要期望信号和噪声/干扰的二阶统计量

$$\mathbf{w}_{SIR} = \Lambda \cdot R_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_s, \quad \Leftarrow \quad R_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{w}_{SIR} = SIR \cdot R_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w}_{SIR}, \quad \text{其中 } \Lambda = \frac{E\{s^2(t)\}}{SIR} \cdot \mathbf{v}_s^H \mathbf{w}_{SIR}。$$

当干扰为空间白噪声时, $R_{\mathbf{n}} = I \longrightarrow \mathbf{w}_{MVDR} = \mathbf{w}_{MPDR} = \mathbf{w}_{SIR} = \mathbf{w}_{MSE} = \frac{1}{N} \mathbf{v}_s$, 只进行空间



匹配；否则，上述各最优波束形成器将进行时空域最优处理，完成对期望信号无偏估计。

对于 MVDR 波束形成器，若有一个期望信号和一个干扰，二者不相关且均为平面波信号，则阵列输出为：

$$\begin{aligned}
 \hat{f} &= \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{x} \\
 &= \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} \\
 &= \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \cdot R_n^{-1} \cdot [f \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}_s) + I \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}_I) + \mathbf{n}]}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} \\
 &= f + \left[\frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}_I)}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} \cdot I + \frac{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v}^H(\mathbf{k}_s) \cdot R_n^{-1} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}_s)} \right]
 \end{aligned}$$

各种最优准则的设计目标都是使上式中括号里的项最小。

当不存在失配时，上述各最优准则得到的输出 SIR 均相同！

存在失配时，不同波束形成器的反应不同：



传统波束形成器：失配时的阵列增益与无失配的阵列增益之比是阵列的功率方向图：

$$\frac{A_c(\mathbf{v}_a)}{A_c(\mathbf{v}_m)} = |B_c(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2$$

MVDR 波束形成器：归一化失配阵列增益是 MVDR 波束形成器的天线方向图：

$$\frac{A_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)}{A_o(\mathbf{v}_m)} = |B_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)|^2$$

MPDR 波束形成器：MVDR 和 MPDR 波束形成器的阵列增益之比为：

$$\frac{A_{mvdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)}{A_{mpdr}(\mathbf{v}_a : \mathbf{v}_m)} = 1 + (2M + M^2) \sin^2(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_a : \rho_n^{-1})$$

可见，对 \mathbf{v}_a 匹配的 MPDR 波束形成器的输出信噪比 M 越大，采用 MPDR 波束形成器时对信号的抑制越大；即信号越强，失配时被抑制得越厉害。当信噪比很高时，很小的 DOA 失配都会造成性能的急剧下降。



◆ 鲁棒波束形成器

线性限制波束形成器:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \cdot R_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}, \quad s.t. \quad C^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_{LCMP} = R_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot C \left(C^H \cdot R_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot C \right)^{-1} \mathbf{f}$$

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \cdot R_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w}, \quad s.t. \quad C^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_{LCMV} = R_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot C \left(C^H \cdot R_{\mathbf{n}}^{-1} \cdot C \right)^{-1} \mathbf{f}$$

- 控制波束在小频率波数域的特性: 单点 / 多点 / 导数限制
- 控制波束在大频率波数域的特性: 特征值限制/静态波束限制

与 LCMP 完全等价但实现结构不同的波束形成器——GSC 对消器:

使波束形成器的输出功率 $E\{y^2(t)\}$ 最小

\Leftrightarrow 使波束形成器上下两个支路 $y_q = \mathbf{w}_q^H \mathbf{x}$ 和 $y_n = (C_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{x}$ 之间的均方误差最小

$\Leftrightarrow y_n$ 为 y_q 的 MMSE 估计

$\Leftrightarrow (C_n \mathbf{w}_n)^H \mathbf{n}$ 为 $\mathbf{w}_q^H \mathbf{n}$ 的 MMSE 估计

——→ 从下面的支路中估计出干扰和噪声, 再从上面的支路中将其减去, 即旁瓣对消器!



平方限制波束形成器（软限制）：

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H R_x \mathbf{w} \quad s.t. \quad (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^H Q (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \leq e_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{w} = (R_x + \beta Q)^{-1} R_x \mathbf{w}_0$$

当 $Q=I$ 时，上述平方限制变为对角线加载技术：

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H R_x \mathbf{w} \quad s.t. \quad \mathbf{w}^H \mathbf{v}_s = 1 \quad \& \quad \mathbf{w}^H \mathbf{w} \leq e_0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{w}_{MPDR,DL} = \frac{(R_x + \beta I)^{-1} \cdot \mathbf{v}_s}{\mathbf{v}_s^H \cdot (R_x + \beta I)^{-1} \cdot \mathbf{v}_s}$$

◆ 降维空间波束形成器

各种降维方法可描述为一个统一的形式，即通过一个适当的降维转换 T 矩阵（ $N \times D_r$ 维且 $D_r < N$ ），使输入数据的维数由 N 维降到 D_r 维，再在这个降维空间中进行 D_r 维自适应处理。

经 T 转化后，输入信号矢量转化为：

$$\mathbf{x}_T = T^H \cdot \mathbf{x}$$

阵簇矢量转化为：

$$\mathbf{v}_T = T^H \cdot \mathbf{v}$$



输入信号相关矩阵转化为:

$$R_T = T^H \cdot R \cdot T$$

对于转化后数据求最佳权 \mathbf{w}_T 为:

$$\mathbf{w}_T = \Lambda \cdot R_T^{-1} \cdot \mathbf{v}_T$$

该权矢量由原来的 N 维降到 D_r 维。

● 子空间波束形成器

类似于对标量随机变量进行的卡亨南—洛维展开, 对统计独立的复高斯随机向量—频域快拍 $\mathbf{X}(\omega_m, k)$ 进行正交展开:

$$\mathbf{X}(\omega_m, k) = \sum_{i=1}^N x_i \Phi_i$$

其中正交基 $\Phi_i^H \Phi_j = \delta_{ij}$, 要使得 $E[x_i x_j] = \lambda_i \cdot \delta_{ij}$; 在正交基上的展开系数 $x_i = \Phi_i^H \mathbf{X}(\omega_m, k)$

$$\lambda_i \cdot \Phi_i = S_x(\omega_m) \Phi_i$$

——正交基上展开系数的能量即为空间谱矩阵的特征值; 正交基为空间谱矩阵的特征向量。



PC 波束形成器:

$$\mathbf{w}_{mpdr,es}^H = \left(\mathbf{v}_m^H \cdot S_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{v}_m \right)^{-1} \cdot \mathbf{v}_m^H \cdot S_{\mathbf{x}}^{-1} = \gamma_{es} \mathbf{v}_m^H U_{S+I} \Lambda_{S+I}^{-1} U_{S+I}^H = \gamma_{es} \cdot \mathbf{v}_m^H \cdot U_r \Lambda_r^{-1} U_r^H = \frac{\sum_{i=1}^{D_r} \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{v}_m^H \Phi_i) \Phi_i^H}{\sum_{i=1}^{D_r} \frac{1}{\lambda_i} |\mathbf{v}_m^H \Phi_i|^2}$$

选择信号+干扰子空间的依据是选择使接收信号投影能量最大的正交基。

适用于高信噪比情况，信号必须在信号+干扰子空间中。

CS 波束形成器:

$$\mathbf{w}_{cs}^H = \frac{\mathbf{v}_m^H U_{cs} \Lambda_{cs}^{-1} U_{cs}^H}{\mathbf{v}_m^H U_{cs} \Lambda_{cs}^{-1} U_{cs}^H \mathbf{v}_m} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{v}_m^H \Phi_i|^2}{\lambda_i} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{v}_m^H \Phi_i}{\lambda_i} \cdot \Phi_i^H$$

选择信号+干扰子空间的依据是选择使输出信号能量最大的正交基。综合考虑了期望信号与干扰信号在各正交基上投影的比例，可以得到在最小输出功率意义上最优的子空间。



DMR 波束形成器:

$$\mathbf{w}_{dm}^H = \frac{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1}}{\mathbf{v}_m^H \mathbf{S}_x^{-1} \mathbf{v}_m} = \frac{\alpha \sum_{i=1}^{D_m} \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\Phi}_i) \boldsymbol{\Phi}_i^H + \mathbf{v}_m^H \mathbf{P}_{dm}^\perp}{\alpha \sum_{i=1}^{D_m} \frac{1}{\lambda_i} |\mathbf{v}_m^H \boldsymbol{\Phi}_i|^2 + \mathbf{v}_m^H \mathbf{P}_{dm}^\perp \mathbf{v}_m} \xrightarrow{\text{若无失配时}} = \mathbf{w}_{mpdr,es}^H$$

其基本思想是将谱矩阵中 $N - D_m$ 个最小的特征值用其平均值代替:

$$\tilde{\mathbf{S}}_x \triangleq \sum_{i=1}^{D_m} \lambda_i \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\Phi}_i^H + \alpha \sum_{i=D_m+1}^N \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\Phi}_i^H$$

适用于低信噪比情况，信号不能在主模式子空间中。

定义 $\mathbf{X}_{es} = U_r^H \mathbf{X}$ 以及 $\mathbf{v}_{es} = U_r^H \mathbf{v}_m$ 分别为频域快拍和阵簇矢量在 U_r 子空间的展开系数，则波束形成器还可以写成:

$$\mathbf{w}_{mpdr,es}^H = \frac{\mathbf{v}_{es}^H \boldsymbol{\Lambda}_r^{-1}}{\mathbf{v}_{es}^H \boldsymbol{\Lambda}_r^{-1} \mathbf{v}_{es}}$$

→ 波束形成器是在特征空间中完成的，降维矩阵 $T = U_r$ 。



● 波束域处理波束形成器

传感器阵接收的频域快拍经过波束形成矩阵后的输出即为波束域的频域快拍：

$$\mathbf{X}_{bs} = B_{bs}^H \cdot \mathbf{X}$$

在波束域的阵簇矢量为：

$$\mathbf{v}_{bs} = B_{bs}^H \cdot \mathbf{v}_s$$

波束域波束形成器的最优 MPDR 加权向量为：

$$\mathbf{w}_{MDPR,bs}^H = \frac{\mathbf{v}_{bs}^H S_{\mathbf{x}_{bs}}^{-1}}{\mathbf{v}_{bs}^H S_{\mathbf{x}_{bs}}^{-1} \mathbf{v}_{bs}}$$

→ 波束形成器是在波束域空间中完成的，降维矩阵 $T = B_{bs}$ 。

