

第四章 空间参数估计算法

§4.1 引言

- 主要目标:

利用传感器阵的时空接收数据, 估计接收波形中的非线性参数, 如到达方位角(DOA: Direction of Arrival), 并研究提高角估计精度、角度分辨力和提高运算速度的各种算法。

- 空间参数估计方法:

最早的方法:

机械波束扫描——速度和精度都满足不了实际的需要。

常规的时域/空域谱分析:

线性谱估计, 依然受到瑞利极限约束。



非线性谱估计:

为了提高频率分辨率, 实现频率的超分辨估计, 提出时域谱分析, 如:

Capon (1969) 提出的极大似然估计

Burg (1967) 提出的最大熵法

Pisarenko (1973) 提出的谐波分解法

为了提高角度分辨率, 实现角度的超分辨估计, 在空间谱分析中采用非线性处理, 如:

极大似然估计

最大熵估计 (线性预测)

自相关矩阵的特征分解法——典型的代表是多信号分类法 (**MUSIC**)

旋转不变技术的参数估计法 (**ESPRIT**)

最小内积法 (**MN**)



- **处理空间相干信号**——如多径效应及应答式干扰

以牺牲有效阵元数来换取信号的不相关性，先对阵列信号进行去相关的预处理，而后应用上述算法获得精确的到达角估计，如可以用下列方法来处理相干信号：

空间平滑法；

前后向预测投影矩阵法；

数据矩阵分解法；

频域平滑法等。

- **可以把空间参数估计技术分成两大类**

基于谱的方法：构造一个自变量为 DOA 的类似谱的函数，使此函数达到峰值的 DOA 即为 DOA 估计。

基于参数的方法：同时搜索所有的待估参数，常常可以得到更精确的估计。



§4.2 基于谱的 DOA 估计

§4.2.1 波束形成技术

这种测角方法的基本思想是利用波束形成技术，即对阵列不断进行定向并测量输出功率，使阵列输出功率达到最大值的方向即对应于 DOA 估计。

阵列响应是传感器输出的线性组合：

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t)$$

对于 K 个快拍 $y(1), y(2), \dots, y(K)$ ，输出平均功率为：

$$p(\mathbf{w}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |y(t)|^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \hat{R}_x \mathbf{w}$$

一、传统的波束形成器（Bartlett 波束形成器）

设传感器阵接收数据为：



$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\theta)s(t) + \mathbf{n}(t)$$

其中 $\mathbf{n}(t)$ 为空间白噪声。

为使输出功率最大，则：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}} E\{\mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \mathbf{w}\} &= \max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H E\{\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)\} \mathbf{w} = \max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H R_{\mathbf{x}} \mathbf{w} \\ &= \max_{\mathbf{w}} \left\{ E\{s(t)\}^2 \cdot |\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta)|^2 + \sigma^2 |\mathbf{w}|^2 \right\}, \quad s.t. \quad |\mathbf{w}|^2 = 1 \end{aligned}$$

可得其解为空间匹配滤波器：

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}(\theta)}{\sqrt{\mathbf{v}^H(\theta) \mathbf{v}(\theta)}} \xrightarrow{\text{均匀线阵}} \mathbf{w} = \frac{1}{N} \mathbf{v}(\theta)$$

此时经典空间谱为：

$$P(\theta) = \mathbf{w}^H R_{\mathbf{x}} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}^H(\theta) R_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\theta)}{\mathbf{v}^H(\theta) \mathbf{v}(\theta)}$$



二、MPDR (Capon) 波束形成器

若有两个信号均处于主瓣内，则用上述传统波束形成器构成的经典空间谱无法区分它们的到达角。

为了解决这个问题，可对主瓣进行约束，允许所需方向的信号通过，而以最佳的方式尽量不让其它方向的信号通过。

可以用 LCMP/MPDR 波束形成器来实现这个想法。

波束形成器的目标函数为：

$$\min_{\mathbf{w}} P(\mathbf{w}, \theta) = \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H R_x \mathbf{w} = \min_{\mathbf{w}} \left\{ E \{s(t)\}^2 \cdot |\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta)|^2 + \sigma^2 |\mathbf{w}|^2 \right\}, \quad s.t. \quad \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta) = 1$$

可得到相应的权函数为：

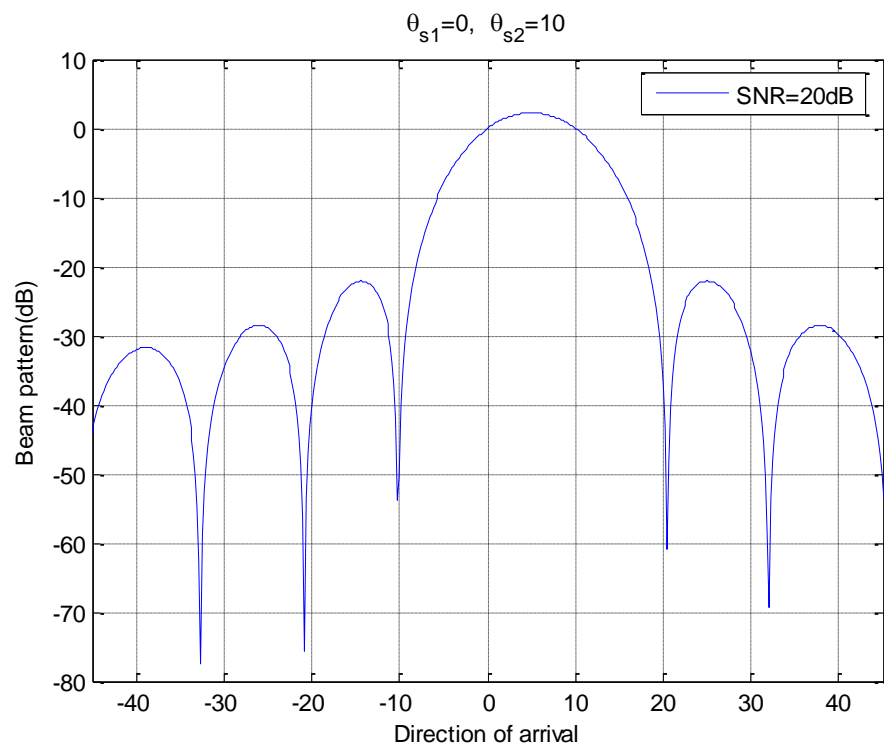
$$\mathbf{w} = \frac{R_x^{-1} \mathbf{v}(\theta)}{\mathbf{v}^H(\theta) R_x^{-1} \mathbf{v}(\theta)}$$

$$\text{此时空间谱为: } P(\theta) = \mathbf{w}^H R_x \mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta) R_x^{-1} \mathbf{v}(\theta)}。$$

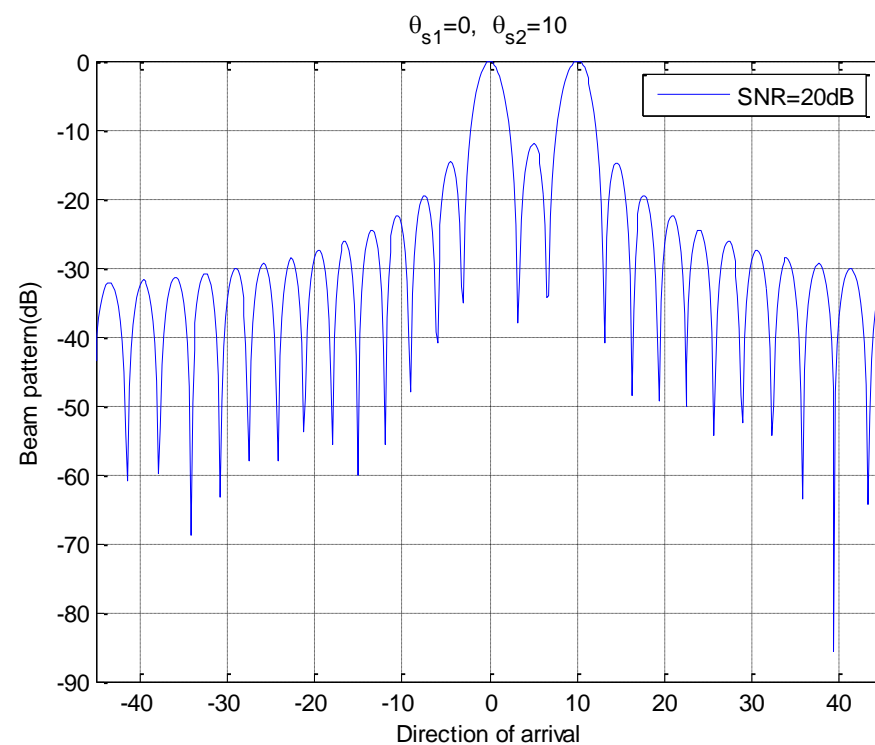


● **回顾：** 两个期望信号（到达方向分别为 $\theta_{s1}=0^\circ$ 和 θ_{s2} ）、MVDR 波束形成器

1) **分析阵元数 N 对方向图的影响：** SNR1=SNR2=20dB, $\Delta\theta = \theta_{s2} - \theta_{s1}$

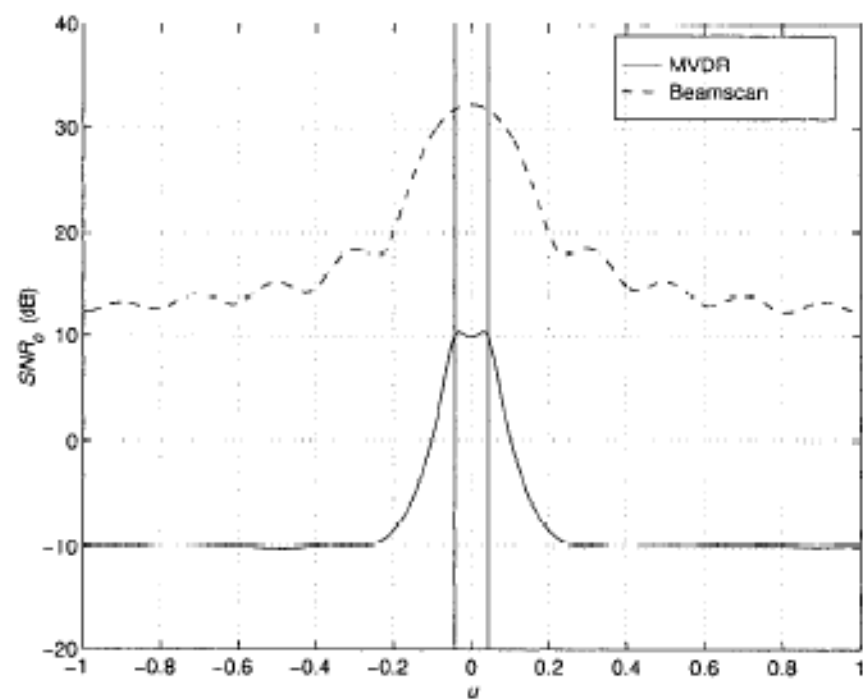


$$N=10, \theta_{NN} = 23.1^\circ > \Delta\theta$$

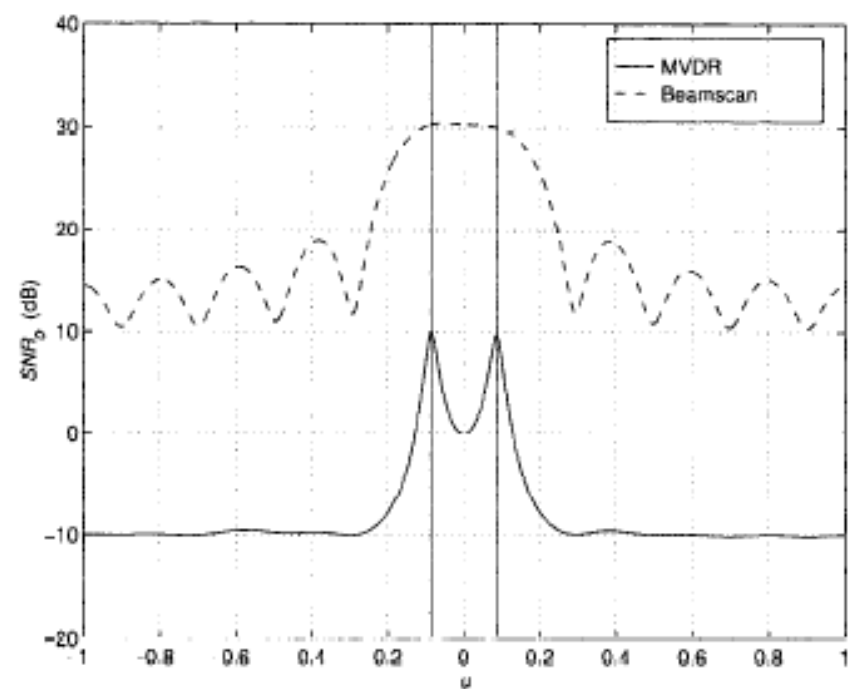


$$N=40, \theta_{NN} = 5.7^\circ < \Delta\theta$$





(a)



(b)

Figure 9.1 Performance of beamscan and MVDR algorithms: standard 10-element linear array, $\rho = 0$, $SNR = 20$ dB, $K = 1,000$: (a) $u = +0.0433$; (b) $u = \pm 0.0866$.



§ 4.4.2 基于子空间的算法

Capon 波束形成器通过约束条件 $\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta) = 1$ ，使相应的空间谱得到了较高的分辨力。

实际上，约束条件的选择有很大的灵活性。

问题：是否存在一个特殊的约束条件使角分辨力达到最佳？

若选择如下一般的约束条件：

$$\mathbf{w}^H C \mathbf{v}(\theta_d) = 1$$

则阵列输出功率为：

$$P(\theta) = \frac{1}{[C \mathbf{v}(\theta_d)]^H \hat{R}_x^{-1} [C \mathbf{v}(\theta_d)]} = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_d) C^H \hat{R}_x^{-1} C \mathbf{v}(\theta_d)}$$

其中 C 是一个特定的矩阵。

若能选择 C 满足 $C \mathbf{v}(\theta_d) = 0$ ，则 $P(\theta_d)$ **出现峰值**，即在波束扫描出现峰值时，根据 $P(\theta)$ 的峰值所处的位置即可确定源方向。



基于子空间的算法通过分析协方差/谱矩阵的特征值和特征向量，来寻找满足此条件的 C 。

这类算法基于对协方差矩阵的谱分解，早就被用于时间序列分析和谱估计理论中。但是人们对基于子空间的算法产生极大兴趣的原因，却是 MUSIC 算法的提出。MUSIC 算法最早是从 DOA 估计问题中提出的，后来又被用回到谱分析和系统辨识等领域中。

基于子空间的算法充分利用了接收数据协方差矩阵的如下性质：

- ① 由 R_x 的特征向量张成的空间可以分为两个子空间——信号子空间和噪声子空间；
- ② 阵簇矢量与噪声子空间正交。

由于噪声子空间与信号子空间正交，故阵簇矢量属于信号子空间。

子空间建模与分析（复习）： 设对于 D 个平面波信号，由 N 个传感器构成的阵列接收信号为：

$$\mathbf{x}(t) = V(t) \otimes \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$

其中 $V(t) = [\mathbf{v}_1(t) \cdots \mathbf{v}_D(t)]$, $\mathbf{v}_i(t) = [\delta(t - \tau_{i,0}) \cdots \delta(t - \tau_{i,N-1})]^T$, $\mathbf{s}(t) = [\mathbf{s}_1(t) \cdots \mathbf{s}_D(t)]^T$,

$\tau_{i_n} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}_n / c$ 。 $\mathbf{n}(t)$ 是时空白高斯噪声，其均值为 0， $E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t - \tau)\} = \sigma_n^2 \delta(\tau) I$ 。



根据上面的模型，可以得到频域模型为：

$$S_{\mathbf{x}}(\omega) = V(\omega)S_{\mathbf{s}}(\omega)V^H(\omega) + \sigma_n^2 I$$

其中谱矩阵 $S_{\mathbf{x}}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{\mathbf{x}}(\tau)\}$ ，空间相关阵为：

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}}(\tau) &= E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t-\tau)\} = E\{V(t) \otimes \mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t-\tau) \otimes V^H(t-\tau)\} + \sigma_n^2 \delta(\tau)I \\ &= V(t) \otimes R_{\mathbf{s}}(t-\tau) \otimes V^H(t-\tau) + \sigma_n^2 \delta(\tau)I \end{aligned}$$

其中 $V(\omega) = [\mathbf{v}_1(\omega) \cdots \mathbf{v}_D(\omega)]$ ，每个元素为阵簇矢量：

$$\mathbf{v}_i(\omega) = \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_{i,0}} \\ \vdots \\ e^{-j\omega\tau_{i,N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}_i^T \mathbf{p}_0} \\ \vdots \\ e^{-j\mathbf{k}_i^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix} = \mathbf{v}(\theta_i)。$$

假定已知平面波信号源的个数 D ，子空间算法要根据上述频域快拍估计 D 个信号的到达角

$\theta_1, \cdots, \theta_D$ 。



将谱矩阵: $S_{\mathbf{x}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{V}^H + \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{S}_c + \mathbf{S}_n$ 进行特征分解, 即用其特征值和特征向量表示为:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}} &= \Phi \cdot \Lambda \cdot \Phi^H = \sum_{i=1}^N \lambda_i \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H = \sum_{i=1}^N (\lambda_i^c + \sigma_n^2) \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H \\ &= \sum_{i=1}^D (\lambda_i^c + \sigma_n^2) \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H + \sum_{i=D+1}^N \sigma_n^2 \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H = \mathbf{U}_s \cdot \Lambda_s \cdot \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_N \cdot \Lambda_N \cdot \mathbf{U}_N^H \end{aligned}$$

其中 $\Phi = [\phi_1 \cdots \phi_N]$, ϕ_i 为 $S_{\mathbf{x}}$ 的特征向量, $\Phi \cdot \Phi^H = \Phi^H \cdot \Phi = \mathbf{I}$;

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \text{ 为 } S_{\mathbf{x}} \text{ 的特征值, } \lambda_i^c, \quad i=1, \dots, D \text{ 为 } \mathbf{S}_c \text{ 的特征值,}$$

σ_n^2 为空间白噪声 $S_{\mathbf{n}}$ 的特征值。

$\mathbf{U}_s \triangleq [\phi_1 \cdots \phi_D]$ 为 $N \times D$ 维矩阵; $\mathbf{U}_N \triangleq [\phi_{D+1} \cdots \phi_N]$ 为 $N \times (N-D)$ 维矩阵;

$$\Lambda_s = \text{diag}\{\lambda_1 \cdots \lambda_D\}, \quad \lambda_i = \lambda_i^c + \sigma_n^2, \quad i=1, \dots, D$$

$$\Lambda_N = \text{diag}\{\lambda_{D+1} \cdots \lambda_N\}, \quad \lambda_i = \sigma_n^2, \quad i=D+1, \dots, N$$

上面假定了特征值是以从大到小的次序排列的, 即:



$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_D > \lambda_{D+1} = \cdots = \lambda_N = \sigma_n^2$$

较大的 D 个特征值对应于信号项，相应的 D 个特征向量构成了一个子空间 U_s ，称为信号子空间，所有的信号方向矢量 $\mathbf{v}(\theta_i)$ 都处于信号子空间。

换句话说，特征向量 ϕ_1, \dots, ϕ_D 与阵簇矢量 $\mathbf{v}(\theta_1), \dots, \mathbf{v}(\theta_D)$ 张成的是同一个空间。实际上， ϕ_1, \dots, ϕ_D 是上述信号子空间的一组正交基。故每个特征向量都可表示为阵簇矢量的线性组合：

$$\phi_i = c_{1i} \mathbf{v}(\theta_1) + \cdots + c_{Di} \mathbf{v}(\theta_D), \quad i = 1, \dots, D$$

较小的 $N-D$ 个特征值对应于噪声项，相应的 $N-D$ 个特征向量构成的子空间 U_N 称为噪声子空间，它与信号子空间正交。

由于阵簇矢量在信号子空间中，故它与噪声子空间正交，即：

$$\|\mathbf{v}^H(\theta_i)U_N\|^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, D$$

从上述分析可见，噪声子空间 U_N 即是我们要寻找的矩阵 C ，满足： $\mathbf{v}^H(\theta_d) \cdot C = 0$

实际上，上式就是各种基于子空间的角估计算法的理论基础。



子空间建模特例：对于 D 个窄带平面波入射信号，阵列接收信号为：

$$\mathbf{x}(t) = V \cdot \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$

其中 $V = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_D]$ ， \mathbf{v}_i 为第 i 个平面波的阵簇矢量，对均匀线阵：

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta_i} & \cdots & e^{j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta_i} \end{bmatrix}^T$$

此时空间协方差矩阵为：

$$R_{\mathbf{x}} = V \cdot R_s \cdot V^H + E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t-\tau)\}$$

对 $R_{\mathbf{x}}$ 进行特征分解可得到：

$$R_{\mathbf{x}} = U_s \cdot \Lambda_s \cdot U_s^H + U_N \cdot \Lambda_N \cdot U_N^H$$

且满足：

$$\|\mathbf{v}^H(\theta_i)U_N\|^2 = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, D$$



一、特征矢量法

根据矩阵求逆公式，有：

$$R_{\mathbf{x}}^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H$$

令 $\mathbf{C} = \mathbf{U}_N$ ，则阵列输出功率 $P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_d) \mathbf{C}^H \hat{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{v}(\theta_d)}$ 中的

$$\mathbf{C}^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{U}_N^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{U}_N = \sum_{i=D+1}^N \frac{1}{\lambda_i} \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H$$

故在约束条件为 $\mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{v}(\theta_d) = 1$ 时的阵列输出功率为：

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_d) \mathbf{C}^H \hat{R}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{v}(\theta_d)} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=D+1}^N \frac{1}{\lambda_i} \cdot \mathbf{v}^H(\theta_d) \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H \mathbf{v}(\theta_d)} = \frac{1}{\sum_{i=D+1}^N \frac{1}{\lambda_i} \cdot \|\mathbf{v}^H(\theta_d) \cdot \phi_i\|^2} = \frac{\sigma_n^2}{\sum_{i=D+1}^N \|\mathbf{v}^H(\theta_d) \cdot \phi_i\|^2} \end{aligned}$$



当 θ_d 扫过有信号来的方向 θ_k 时, 由于 $\phi_i (i = D+1, \dots, N)$ 与信号子空间正交, 故 $P(\theta_d)$ 出现峰值, 此时的 θ_d 就是信号来波方向 θ_k 。——即**特征矢量法**。

二、MUSIC 法

由于实际上阵列协方差矩阵是从快拍中估计得到的, 故 $N-D$ 个小的特征值并不相同。为了避免特征值大小对方向估计的影响, 可令:

$$C = \sum_{i=D+1}^N \sqrt{\lambda_i} \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H = \Lambda' \cdot U_N, \quad \Lambda' = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_{D+1}} \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_N}\}$$

$$\text{此时阵列的空间谱函数为: } P(\theta_d) = \frac{1}{\sum_{i=D+1}^N \|\mathbf{v}^H(\theta_d) \cdot \phi_i\|^2}$$

这种方法被称为多重信号分类法 (MUSIC: Multiple Signal Classification)。为了与另一种基于参数的根 MUSIC 方法相区别, 这种方法又被称为谱 MUSIC (Spectral MUSIC) 算法。

$$\text{上式还可用矩阵形式写为: } P(\theta_d) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_d) U_N U_N^H \mathbf{v}(\theta_d)} = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_d) [I - U_s U_s^H] \mathbf{v}(\theta_d)}$$



三、加权 MUSIC 法

谱 MUSIC 还可以被推广为更一般的形式——加权 MUSIC，其空间谱函数为：

$$P(\theta_d) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_d) \mathbf{U}_N \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{U}_N^H \mathbf{v}(\theta_d)}$$

引入加权矩阵 \mathbf{W} ，就可以考虑不同特征向量的影响，加权矩阵的选择方法不同，就可以得到不同的算法。

当 $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ ，即对各特征向量进行均匀加权时，加权 MUSIC 就是谱 MUSIC 算法。已经证明，均匀加权实际上是一种最优加权，它使估计方差渐近最小。

但是，若信噪比较低或快拍数较少，则谱 MUSIC 算法的性能将大大降低，此时通过适当地选择非均匀加权可以提高算法的分辨率，同时也不会大大增加估计方差。



四、最小内积法 (MN: Min_Norm)

这种方法的基本思想是寻找一个矢量 \mathbf{d} ，使得：

$$\mathbf{v}^H(\theta_k)\mathbf{d} = 0, \quad k = 1, \dots, D \quad (*)$$

$$\text{其中 } \mathbf{d} = [d_1 \cdots d_N]^T, \quad \mathbf{v}(\theta_k) = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta_k} & \cdots & e^{j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\theta_k} \end{bmatrix}^T \triangleq \begin{bmatrix} e^{-j\beta_k} & \cdots & e^{-jN\beta_k} \end{bmatrix}^T。$$

为了检测信号零点，定义一个多项式：

$$D(z) = \sum_{i=1}^N d_i \cdot z^{-i}, \quad \text{其中 } z = e^{j\beta_i}$$

这个多项式有 N 个根，其中有 D 个根位于单位圆上，即 $z = e^{j\beta_D}$ (满足(*)式)。我们希望另外的 $N - D$ 个根都不在单位圆上，否则将出现虚假零点。实际上，满足(*)式的有很多。为了保证 $D(z)$ 的其余 $N - D$ 个根位于单位圆内，R. Kumaresan 证明 (1983)，在 $d_1 = 1$ 时只要满足

$$\min \sum_{i=1}^N |d_i|^2 = \min \mathbf{d}^T \mathbf{d} \text{ 即可，故此法被称为最小内积法。}$$



满足(*)式的 \mathbf{d} 一定位于噪声子空间中。通过寻找满足 $d_1 = 1$ ，且 $\sum_{i=1}^N |d_i|^2$ 最小的 \mathbf{d} ，可导出：

$$\mathbf{d} = U_N \cdot \frac{\mathbf{c}^*}{\|\mathbf{c}\|} = U_N W$$

此时 MN 法的空间谱函数为：

$$P(\theta_d) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_d) \mathbf{d} \mathbf{d}^H \mathbf{v}(\theta_d)} = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta_d) U_N W W^H U_N^H \mathbf{v}(\theta_d)}$$

在前述的特征分解法（如特征矢量法或 MUSIC 算法）中，零谱的表示式为：

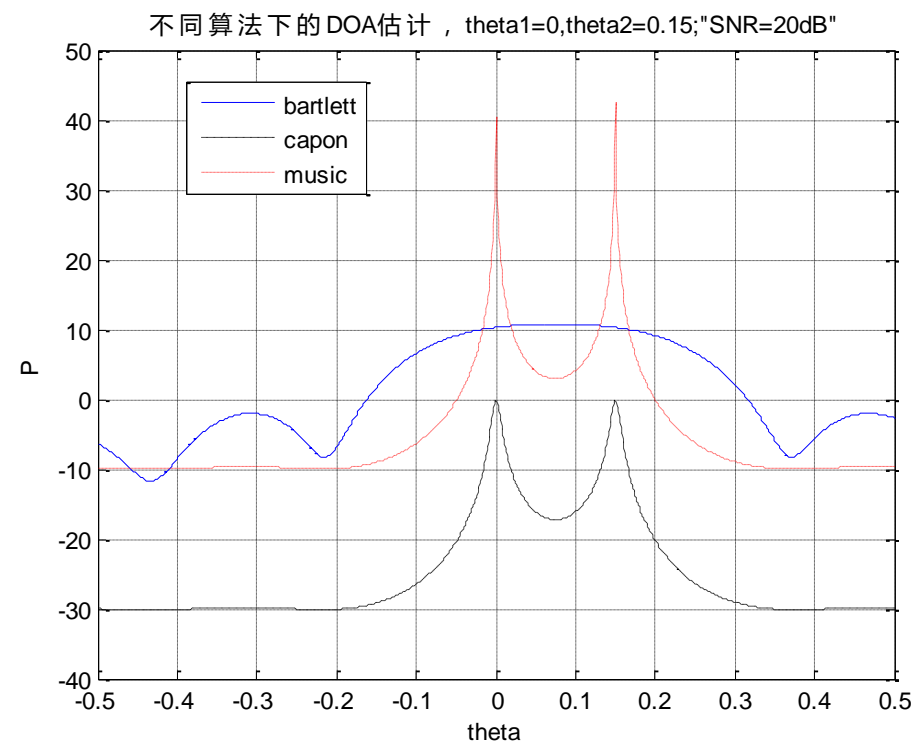
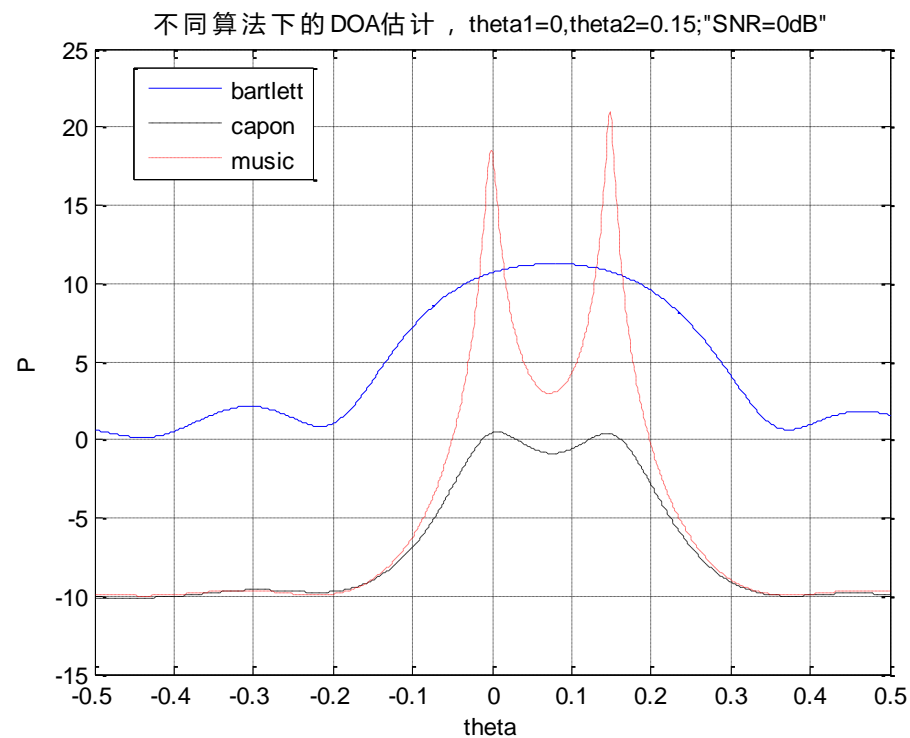
$$D(\theta) = \|\mathbf{v}^H(\theta) U_N\|^2 = \mathbf{v}^H(\theta) \sum_{i=D+1}^N \phi_i \cdot \phi_i^H \mathbf{v}(\theta)$$

这些算法利用了噪声子空间中**所有的**噪声特征矢量。

若谱函数不用**总的噪声子空间**，而只用其中的一个噪声特征矢量，则无论是用 MUSIC 法还是 MN 法，除在信号源处出现峰值，在没有信号源处也将出现峰值，因为此时不满足最小模条件。从以上分析可见，MN 法是加权 MUSIC 法的一个特例：当选择 $W = \frac{\mathbf{c}^*}{\|\mathbf{c}\|}$ （其中 \mathbf{c} 为 U_N 的

第一行所构成的矢量）时，即得到**最小内积法**。



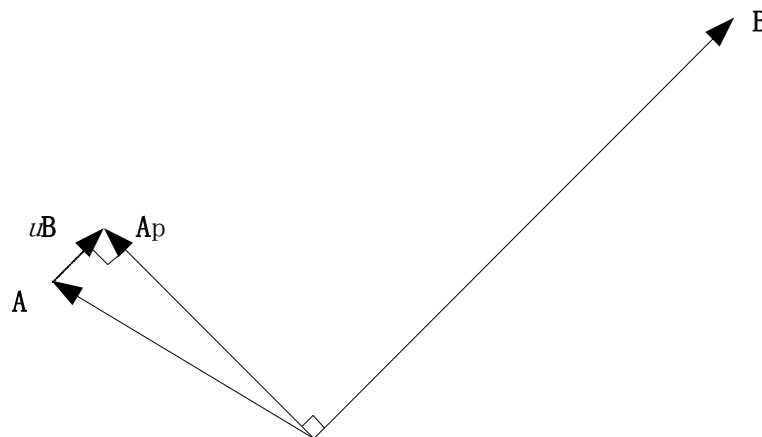


一个由10个阵元组成的均匀线阵。设两个窄带不相关信号的到达角度分别为 $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_2 = 0.15$ 且 $\text{SNR}=0\text{dB}$ 、 20dB 时，Bartlett波束形成器算法、Capon算法和MUSIC算法的空间谱



§4.2.3 投影矩阵法

一、正交投影



图中 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 表示任意维向量，要求 \mathbf{A} 在 \mathbf{B} 上的投影或与 \mathbf{B} 正交的分量 \mathbf{A}_p ，可以令此投影矢量为： $\mathbf{A}_p = \mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$

而 $\mathbf{B}^H \mathbf{A}_p = 0$ ，故： $\mathbf{B}^H \mathbf{A}_p = \mathbf{B}^H \mathbf{A} + \mu\mathbf{B}^H \mathbf{B} = 0$

$$\therefore \mu = -(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_p = \mathbf{A} - (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^H \mathbf{A} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{B} \mathbf{B}^H}{\mathbf{B}^H \mathbf{B}} \right) \mathbf{A} = \mathbf{P}^\perp \mathbf{A}$$

其中 \mathbf{P}^\perp 为投影矩阵，它将任意向量 \mathbf{A} 投影在与 \mathbf{B} 垂直的空间中。



一般地, 若 A 和 B 为矩阵, 则将 A 投影到 B 的列矢量所张成的空间的投影算子或投影矩阵为:

$$P = B(B^H B)^{-1} B^H$$

将 A 投影到 B 的列矢量所张成空间的正交补空间的投影矩阵为:

$$P^\perp = I - B(B^H B)^{-1} B^H$$

二、投影矩阵法

若有一投影到噪声子空间的投影算子 P_N , 那么: $P_N^H \mathbf{v}(\theta_k) = 0, \quad k = 1, \dots, D$ 。

则通过下面的空间谱即可得到 DOA 估计:

$$P(\theta) = \frac{1}{\left[P_N^H \mathbf{v}(\theta_d) \right]^H \left[P_N^H \mathbf{v}(\theta_d) \right]}$$

我们知道, P_N 可以用噪声子空间的特征向量表示, 此时即可得到 MUSIC 算法:

$$P_N = U_N (U_N^H U_N)^{-1} U_N^H = U_N U_N^H = \sum_{i=D+1}^N \phi_i \phi_i^H, \quad \textbf{Remember:} \quad U_N^H U_N = I$$



P_N 还可以用方向矩阵 $V(\theta)$ 表示, 即:

$$P_N = I - V(\theta)[V^H(\theta)V(\theta)]^{-1}V^H(\theta),$$

其中 $V(\theta)$ 的列矢量 $\mathbf{v}(\theta_k)$ 构成了信号子空间。

由于 θ_k 未知, 故无法得到 $V(\theta)$ 。但若能找到矩阵 Q 使其列矢量也展成信号子空间, 则:

$$P_N = I - Q[Q^H Q]^{-1}Q^H$$

设 D 个信号源相互独立, 则接收信号的协方差矩阵为:

$$R_x = V(\theta)R_s V^H(\theta) + \sigma^2 I = \sum_{k=1}^D P_k \mathbf{v}(\theta_k) \mathbf{v}^H(\theta_k) + \sigma^2 I = R_C + \sigma^2 I, \text{ 其中 } P_k \text{ 为第 } k \text{ 个源的功率。}$$

容易证明, 若所有信号源独立, 则 R_C 中任何 D 个行向量 $\mathbf{r}_{C,l}$ 的共轭转置均展成信号子空间,

即 $\mathbf{r}_{C,l}$ 是 $\mathbf{v}(\theta_k)(k=1, \dots, D)$ 的线性组合。可以选择:

$$Q = [\mathbf{q}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_D]$$

而 $\mathbf{q}_l = \mathbf{r}_l^H$, \mathbf{r}_l 为 R_C 的第 l 行。——当 SNR 较高时, 用这种方法可以简便地得到 P_N 。



§4.3 基于参数的 DOA 估计

考虑 N 个任意配置的传感器，有 D 个窄带信号源，其入射方向与参数方向的夹角为 θ_k , $k=1, \dots, D$ ，则阵列接收的复包络为：

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^D \mathbf{v}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{V}(\theta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t)$$

其中 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_N(t)]^T$, $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ \cdots \ n_N(t)]^T$

$$\mathbf{v}(\theta_k) = [a_1(\theta_k) e^{j\omega\tau_1(\theta_k)} \ \cdots \ a_N(\theta_k) e^{j\omega\tau_N(\theta_k)}]^T,$$

$\mathbf{V}(\theta) = [\mathbf{v}(\theta_1) \ \cdots \ \mathbf{v}(\theta_D)]$ 为 $N \times D$ 阶方向矩阵；

$x_i(t)$ 是第 i 个传感器接收的信号；

$s_k(t)$ 是第 k 个源对某参数点的发射信号；

$\mathbf{S}(t) = [s_1(t) \ \cdots \ s_D(t)]$ 为 $D \times 1$ 信号矢量。

$a_i(\theta_k)$ 是第 i 个传感器对第 k 个信号源在 θ_k 方向的幅度响应；

$\tau_i(\theta_k)$ 是第 i 个传感器与参考点间对第 k 个源的时间延迟。



§4.3.1 极大似然(ML)算法

假设：信号个数 D 是已知的，且 $D < N$ ；

每个信号源的阵簇矢量是相互独立的，即 $V(\theta)$ 是列满秩矩阵；

$n_i(t)$ 是时空平稳高斯随机过程，均值为 0，方差为 σ_n^2 ，噪声的各个采样之间统计独立；

信号波形是确定性的但是未知的。

因此，对 $\mathbf{x}(t)$ 得到的采样 $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(K)$ 的联合概率密度为：

$$P(\mathbf{x}(1) \cdots \mathbf{x}(K)) = \prod_{i=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \det(\sigma_n^2 I)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} \|\mathbf{x}(i) - V(\theta)\mathbf{S}(i)\|^2\right)$$

式中 $\det[\cdot]$ 表示求 $[\cdot]$ 的行列式， $\|\cdot\|$ 是欧氏范数。

对上式取对数并舍去常数项，得到似然函数为：

$$L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{S}(t), \sigma_n^2) = -KN \log \sigma_n^2 - \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^K \|\mathbf{x}(i) - V(\theta)\mathbf{S}(i)\|^2$$



为了求极大似然估计, 需对未知参数 θ , $\mathbf{S}(t)$ 和 σ_n^2 求似然函数的极值→多参数优化问题。

先对 σ_n^2 进行估计。固定 θ 和 \mathbf{S} , 对 σ_n^2 求极大值, 得到噪声方差的估计为:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{KN} \sum_{i=1}^K \|\mathbf{x}(i) - V(\theta)\mathbf{S}(i)\|^2$$

把 $\hat{\sigma}_n^2$ 代入原似然函数中并忽略常数项, 则对 θ 和 \mathbf{S} 的 **ML** 估计是求解下面的极大值问题:

$$\max_{\theta, \mathbf{S}} \left\{ -KN \log \left(\frac{1}{KN} \sum_{i=1}^K \|\mathbf{x}(i) - V(\theta)\mathbf{S}(i)\|^2 \right) \right\}$$

由于对数函数是单调函数, 故上式的极大值等效于下式的极小值, 即:

$$\min_{\theta, \mathbf{S}} \left\{ \sum_{i=1}^K \|\mathbf{x}(i) - V(\theta)\mathbf{S}(i)\|^2 \right\} \quad (**)$$

固定 θ 对 \mathbf{S} 进行估计, 实际上成为一个 LS 估计问题:

$$\hat{\mathbf{S}}(i) = [V^H(\theta)V(\theta)]^{-1}V^H(\theta)\mathbf{x}(i) = V^+(\theta)\mathbf{x}(i)$$

其中 $V^+(\theta) = [V^H(\theta)V(\theta)]^{-1}V^H(\theta)$ 是 $V(\theta)$ 的 Moore-Penrose 伪逆。



将 $\hat{\mathbf{S}}(i)$ 代入(**)式中可得:

$$\begin{aligned} & \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=1}^K \left\| \mathbf{x}(i) - V(\theta) [V^H(\theta) V(\theta)]^{-1} V^H(\theta) \mathbf{x}(i) \right\|^2 \right\} \\ &= \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=1}^K \left\| \mathbf{x}(i) - P_V \mathbf{x}(i) \right\|^2 \right\} = \min_{\theta} \left\{ \sum_{i=1}^K \left\| P_V^\perp \mathbf{x}(i) \right\|^2 \right\} \end{aligned}$$

其中 $P_V = V(\theta) [V^H(\theta) V(\theta)]^{-1} V^H(\theta)$ 是投影到 $V(\theta)$ 的列矢量所张成空间的投影算子,

$P_V^\perp = I - P_V$ 是投影到 $V(\theta)$ 的零空间的正交投影算子。

此时目标函数变为:

$$J = \sum_{i=1}^K \left\| P_V^\perp \mathbf{x}(i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^K \left[P_V^\perp \mathbf{x}(i) \right]^H P_V^\perp \mathbf{x}(i) = \sum_{i=1}^K \mathbf{x}^H(i) (P_V^\perp)^H P_V^\perp \mathbf{x}(i)$$

投影算子 P_V^\perp 是幂等矩阵, 即:

$$P_V^\perp = (P_V^\perp)^H = (P_V^\perp)^2$$



由迹的性质：

$$\alpha = \mathbf{x}^H A \mathbf{y} = \text{tr}(\alpha) = \text{tr}(\mathbf{x}^H A \mathbf{y}) = \text{tr}(A \mathbf{y} \mathbf{x}^H)$$

其中 α 为标量， \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 为向量， A 为方阵。

$$\text{故 } J = \sum_{i=1}^K \mathbf{x}^H(i) P_v^\perp \mathbf{x}(i) = \text{tr} \left[P_V^\perp \sum_{i=1}^K \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^H(i) \right] = K \text{tr} [P_V^\perp \hat{R}_x]$$

其中 $\hat{R}_x = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{x}^H(i) \mathbf{x}(i)$ 是 R_x 的极大似然估计。

因此，对 $\boldsymbol{\theta}$ 进行 ML 估计只需求：

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} J = \min_{\boldsymbol{\theta}} K \text{tr} [P_V^\perp \hat{R}_x] \quad \text{或} \quad \max_{\boldsymbol{\theta}} J = \max_{\boldsymbol{\theta}} K \text{tr} [P_V \hat{R}_x]$$

一旦得到 $\boldsymbol{\theta}$ ，即可由下式估计 $\hat{\mathbf{S}}$ 和 $\hat{\sigma}_n^2$ ：

$$\hat{\mathbf{S}} = V^+(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}(i)$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{KN} \sum_{i=1}^K \|\mathbf{x}(i) - V(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S}(i)\|^2 = \frac{1}{KN} \sum_{i=1}^K \|P_V^\perp \mathbf{x}(i)\|^2 = \frac{1}{N} \text{tr} [P_V^\perp \hat{R}_x]$$



上面的 **ML** 估计是一种非线性多维极大值问题，其计算量是惊人的。为了简单且有效地计算这种多维极大值问题，M. Wax (1988) 提出了一种**交替投影算法** (AP: Alternating Projection)。

在求多维参数 θ 最大时，AP 算法不求它们同时最大，而是采用各维交替达到极大的方法，这时多维搜索就简化为一维搜索。这种方法采用迭代技术，变动一个参数，其它参数固定，求得这一个参数的极大值。

设有 D 个信号源，其 DOA 分别为 $\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_D$ ，则用下式求第 k 个源 DOA 的初值 $\hat{\theta}_k^0$ ：

$$\hat{\theta}_1^0 = \arg \min_{\theta_1} \text{tr} [P_{\mathbf{v}(\theta_1)}^\perp \hat{R}_x],$$

$$\text{Remember: } P_v = V(\theta) [V^H(\theta) V(\theta)]^{-1} V^H(\theta), \quad P_v^\perp = I - P_v$$

$$\hat{\theta}_2^0 = \arg \min_{\theta_2} \text{tr} [P_{[\mathbf{v}(\hat{\theta}_1^0) \mathbf{v}(\theta_2)]}^\perp \hat{R}_x]$$

$$\hat{\theta}_3^0 = \arg \min_{\theta_3} \text{tr} [P_{[\mathbf{v}(\hat{\theta}_1^0) \mathbf{v}(\hat{\theta}_2^0) \mathbf{v}(\theta_3)]}^\perp \hat{R}_x]$$

$$\text{则 } \theta_k \text{ 的第 } i+1 \text{ 次迭代由下式求得: } \hat{\theta}_k^{(i+1)} = \arg \min_{\theta_k} \text{tr} [P_{[V(\theta_k^{(i)}) \mathbf{v}(\theta_k)]}^\perp \hat{R}_x]$$

其中 $\theta_k^{(i)} = [\hat{\theta}_1^{(i)} \quad \dots \quad \hat{\theta}_{k-1}^{(i)} \quad \hat{\theta}_{k+1}^{(i)} \quad \dots \quad \hat{\theta}_D^{(i)}]$ 是 $(D-1) \times 1$ 矢量。



§4.3.2 子空间拟合算法

从上一节的分析可知，基于子空间的空间谱估计算法比传统波束形成算法的性能大幅度提高。当信号源不相关时，只要采样数据足够多，MUSIC 算法的 DOA 估计精度与极大似然方法的性能相同。不过，当得不到大量采样数据时，各种基于谱的算法都会存在很大的估计偏，从而导致很低的分辨率。当信号源之间相关性很强时，这个问题尤为突出。

20 世纪九十年代以来，M. Viberg, P. Stoica 等人提出了基于参数的子空间算法——子空间拟合算法 (SF: Subspace Fitting)，其统计性能无论是在理论上还是实际上都与 ML 算法相同。

已知阵列协方差矩阵 R_x ，则其特征分解为：

$$R_x = V(\theta)R_s V^H(\theta) + \sigma_n^2 I = U_s \Lambda_s U_s^H + \sigma_n^2 U_n U_n^H$$

$$R_x = \sum_{i=1}^D (\lambda_i^c + \sigma_n^2) \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H + \sum_{i=D+1}^N \sigma_n^2 \cdot \phi_i \cdot \phi_i^H = U_s \cdot \Lambda_s \cdot U_s^H + U_n \cdot \Lambda_n \cdot U_n^H$$

只要 R_s 满秩（即 D 个信号不相关），则矩阵 $V(\theta)$ 与 U_s 张成同一个空间。在一般情况下，若 D 个源信号中有些相关，则 R_s 的秩小于 D ， U_s 中的信号特征矢量个数即是 R_s 的秩 $D' < D$ 。



将 $I = U_s U_s^H + U_n U_n^H$ 代入 R_x 中，得：（Remember：投影算子 $P_N = U_N (U_N^H U_N)^{-1} U_N^H = U_N U_N^H$ ）

$$V(\theta) R_s V^H(\theta) + \sigma_n^2 (U_s U_s^H + U_n U_n^H) = U_s \Lambda_s U_s^H + \sigma_n^2 U_n U_n^H$$

即：

$$V(\theta) R_s V^H(\theta) + \sigma_n^2 U_s U_s^H = U_s \Lambda_s U_s^H。$$

$$V(\theta) R_s V^H(\theta) = U_s (\Lambda_s - \sigma_n^2 I) U_s^H$$

$$\because U_s^H U_s = I$$

$$\therefore U_s = V(\theta) R_s V^H(\theta) U_s (\Lambda_s - \sigma_n^2 I)^{-1} = V(\theta) T$$

即总存在一个 $D \times D'$ 的满秩矩阵 T ，使 $U_s = V(\theta) T$ 成立。这表明 U_s 的 D' 个列矢量位于 $V(\theta)$ 张成的空间，或者说 U_s 张成了 $V(\theta)$ 的 D' 维子空间。

在这个式子中， θ 和 T 是未知的，只要找到满足这个等式的 θ ，即可找到真正的 DOA，其中 T 是一个无用的参量。在实际处理中，矩阵 U_s 只能通过估计得到，这时，上面的等式不再成立。子空间拟合技术是要寻找 $\hat{\theta}$ 和 \hat{T} 使 $V(\hat{\theta}) \hat{T}$ 能最佳地接近矩阵 \hat{U}_s —— 这就是信号子空间



拟合（SSF: Signal Subspace Fitting）算法的基本思想。

采用 Frobenius 范数来度量其接近程度，则 SSF 估计可通过求解下述非线性最优化问题得到：

$$\{\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad T\} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}, T} \|\hat{U}_s - V(\boldsymbol{\theta})T\|_F^2 \quad (*)$$

其中 Frobenius 范数为 $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^H A)$ 。

当 $\boldsymbol{\theta}$ 给定时，先估计 T ，其最佳解为：

$$\hat{T} = [V^H(\boldsymbol{\theta})V(\boldsymbol{\theta})]^{-1} V^H(\boldsymbol{\theta})\hat{U}_s = V^+(\boldsymbol{\theta})\hat{U}_s$$

将 \hat{T} 代入 $(*)$ ，可得：

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\hat{U}_s - V(\boldsymbol{\theta})V^+(\boldsymbol{\theta})\hat{U}_s\|_F^2 = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\hat{U}_s - P_V(\boldsymbol{\theta})\hat{U}_s\|_F^2 \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|P_V^\perp(\boldsymbol{\theta})\hat{U}_s\|_F^2 = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \text{tr}(\hat{U}_s^H P_V^\perp(\boldsymbol{\theta})\hat{U}_s) \end{aligned}$$



由 $tr(ABC) = tr(BCA)$, 有

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} tr(P_V^\perp(\boldsymbol{\theta}) \hat{U}_s \hat{U}_s^H) \longrightarrow \boldsymbol{\theta}_{ML} = \min_{\boldsymbol{\theta}} J = \min_{\boldsymbol{\theta}} Ktr[P_V^\perp \hat{R}_x]$$

考虑到 \hat{U}_s 各列对子空间的不同贡献, 引入一个正定的加权矩阵 W , 按下式对 \hat{U}_s 的列矢量进行加权求得 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 和 \hat{T} :

$$\{\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{T}\} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}, T} \|\hat{U}_s W^{1/2} - V(\boldsymbol{\theta})T\|_F^2$$

这种技术被称为加权子空间拟合 (WSF)。

可得到其解应为:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} tr\{P_V^\perp(\boldsymbol{\theta}) \hat{U}_s W \hat{U}_s^H\}$$

M.Viberg (1991) 证明, 使 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的估计误差最小的加权矩阵为:

$$W = (\Lambda_s - \sigma_n^2 I) \Lambda_s^{-1}$$



§ 4.3.3 均匀线阵的参数 DOA 估计算法

对于均匀线阵，空间矩阵 $V(\theta)$ 具有一个非常特殊、也非常有用的结构——Vandermonde 矩阵结构（其每一列的各元素均为其第一个元素的整数幂次）：

$$V(\theta) = [\mathbf{v}(\theta_1) \quad \mathbf{v}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{v}(\theta_D)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\psi_1} & e^{j\psi_2} & \cdots & e^{j\psi_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N-1)\psi_1} & e^{j(N-1)\psi_2} & \cdots & e^{j(N-1)\psi_D} \end{bmatrix}$$

其中 $\psi_i = 2\pi d \cos \theta_i$ 。

基于这种结构，可以得到一些计算量小且性能很好的 DOA 估计算法。

一、根 MUSIC 算法

MUSIC 算法根据空间谱的峰值位置来确定 DOA，令零谱为：



$$D = \mathbf{v}^H(\theta) \sum_{i=D+1}^N \phi_i \phi_i^H \mathbf{v}(\theta), \quad \text{其中 } \phi_i \text{ 为 } S_{\mathbf{x}} \text{ 的特征向量。}$$

则其零点亦可检测 DOA，即满足下式的 θ 为 DOA 的估计：

$$\mathbf{v}^H(\theta) \phi_i = 0, \quad i = D+1, \dots, N$$

$$\text{将此式写为: } \begin{bmatrix} 1 & e^{j\psi} & \dots & e^{j(N-1)\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{bmatrix} = 0$$

并定义 $z = e^{j\psi}$ ，则上式还可写成：

$$\Phi_i(z) = \sum_{n=1}^N \phi_{ni} z^{n-1} = 0, \quad i = D+1, \dots, N$$

可见我们可以得到 $N-D$ 个多项式，每个多项式均有 D 个根，为 $z_k = e^{j\psi_k}$ 。

为了同时利用所有噪声特征向量的信息，我们把这些多项式代入到零谱中，得到：

$$D(z) = \mathbf{v}^H \sum_{i=D+1}^N \phi_i \phi_i^H \mathbf{v} = \sum_{i=D+1}^N \mathbf{v}^H \phi_i \cdot (\mathbf{v}^H \phi_i)^H = \sum_{i=D+1}^N \Phi_i(z) \cdot \Phi_i^*\left(\frac{1}{z}\right)$$



此多项式位于单位圆上的根即是零谱，即：

$$D(z)_{z=e^{j\psi}} = D(e^{j\psi})$$

由于 $\Phi_i(z)$, $i = D+1, \dots, N$ 的根是信号零点，故 $D(z)$ 的根相对于单位圆镜像对称：

$$D(z) = C \prod_{n=1}^N (1 - z_n z^{-1})(1 - z_n^* z)$$

选择单位圆内最接近单位圆的 D 个根 \hat{z}_k , $k = 1, \dots, D$ ，即可得到 DOA 估计。

$$\hat{\theta}_k = \arccos\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}d} \arg\{\hat{z}_k\}\right), \quad k = 1, 2, \dots, D$$

当所采用的协方差矩阵是估计得到的时， \hat{z}_k 将存在估计误差，即 \hat{z}_k 的幅度和相位均存在误差。

从上式可见，**只有 \hat{z}_k 的相位估计误差会影响根 MUSIC 的性能，故根 MUSIC 算法比谱 MUSIC 具有更高的精度和分辨力。**



二、ESPRIT 算法

根 MUSIC 利用了均匀线阵定向矩阵 $V(\theta)$ 为 Vandermonde 矩阵的结构特点 (即其每一列的各元素均为其第一个元素的整数幂次), 而 ESPRIT 算法则利用了 $V(\theta)$ 结构的另一特点——移位结构。

定义 $V_1(\theta)$ 和 $V_2(\theta)$ 为从 $V(\theta)$ 中删除第一行和最后一行得到的矩阵, 即:

$$V(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\varphi_1} & e^{j\varphi_2} & \cdots & e^{j\varphi_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N-1)\varphi_1} & e^{j(N-1)\varphi_2} & \cdots & e^{j(N-1)\varphi_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(\theta) \\ \text{最后一行} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{第一行} \\ V_2(\theta) \end{bmatrix}$$

则从 $V(\theta)$ 的结构可见:

$$V_2(\theta) = V_1(\theta) \cdot \Phi, \quad V_1(\theta) = J_{s1} \cdot V(\theta), \quad V_2(\theta) = J_{s2} \cdot V(\theta)$$

$$\text{其中 } \Phi = \text{diag}\{e^{j\varphi_1} \quad \cdots \quad e^{j\varphi_D}\}, \quad \varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_i;$$



$$J_{s1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{(N-1) \times (N-1)} & \vdots & \mathbf{0}_{(N-1) \times 1} \end{bmatrix} \text{为从 } V(\theta) \text{ 得到 } V_1(\theta) \text{ 的选择矩阵；}$$

$$J_{s2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-1) \times 1} & \vdots & I_{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \text{为从 } V(\theta) \text{ 得到 } V_2(\theta) \text{ 的选择矩阵。}$$

考虑更一般的情况。设 $V_1(\theta)$ 和 $V_2(\theta)$ 为从原定向矩阵为 $V(\theta)$ 的线阵中得到的任两个结构相同的子阵的定向矩阵，两子阵的阵元轴线方向相距 Δ ，则仍有：

$$V_2(\theta) = V_1(\theta) \cdot \Phi$$

$$V_1(\theta) = J_{s1} \cdot V(\theta)$$

$$V_2(\theta) = J_{s2} \cdot V(\theta)$$

其中 J_{s1} 和 J_{s2} 仍为选择矩阵，其维数为 $(N - \Delta) \times N$ ， $\Phi = \text{diag}\{e^{j\Delta\varphi_1} \quad \dots \quad e^{j\Delta\varphi_D}\}$ 。

$$\text{定义 } 2(N - \Delta) \times N \text{ 维矩阵 } J_s = \begin{bmatrix} J_{s1} \\ \cdots \\ J_{s2} \end{bmatrix}, \text{ 则 } J_s \cdot V(\theta) = \begin{bmatrix} V_1(\theta) \\ V_1(\theta) \cdot \Phi \end{bmatrix}。$$



对定向矩阵为 $V(\theta)$ 的、原均匀线阵的空间相关阵进行特征分解，有：

$$R_{\mathbf{x}} = V(\theta)R_s V^H(\theta) + \sigma_n^2 I = U_s \Lambda_s U_s^H + U_N (\sigma_n^2 I) U_N^H$$

由于 U_s 与 $V(\theta)$ 张成同一个空间——信号子空间，故有： $U_s = V(\theta)T$ 。

因此，

$$J_s \cdot U_s = J_s \cdot V(\theta)T$$

定义 $J_s \cdot U_s = \begin{bmatrix} U_{s1} \\ U_{s2} \end{bmatrix}$ ，故：

$$\begin{bmatrix} U_{s1} \\ U_{s2} \end{bmatrix} = J_s \cdot V(\theta)T = \begin{bmatrix} V_1(\theta)T \\ V_1(\theta)\Phi \cdot T \end{bmatrix}$$

进一步定义 $B = V_1(\theta)T$ ， $\Psi = T^{-1}\Phi T$ ，则上式变为：

$$\begin{bmatrix} U_{s1} \\ U_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ B\Psi \end{bmatrix}$$



从上式可见， $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值是 Φ 的对角线元素。只要从上式中找到 $\boldsymbol{\Psi}$ ，其特征值就对应信号的入射角 $e^{j\varphi_k}$ ， $k=1,\dots,D$ 。

在实际处理时，矩阵 U_s 只能通过估计得到，此时上面的等式不再成立。用 Frobenius 范数来度量方程左右两边矩阵的接近程度，则使上述范数最小的 $\boldsymbol{\Psi}$ 即对应于我们要求的 DOA，即：

$$\{\hat{\mathbf{B}} \quad \boldsymbol{\Psi}\} = \arg \min_{\mathbf{B}, \boldsymbol{\Psi}} \left\{ \left\| \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{s1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{s2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}\boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \right\}$$

对上面的最小化问题求解，可得：

$$\boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1}$$

其中 \mathbf{V}_{12} 和 \mathbf{V}_{22} 是从下面的特征分解中得到的：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{s1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_{s1} & \hat{\mathbf{U}}_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_E \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}^H & \mathbf{V}_{12}^H \\ \mathbf{V}_{21}^H & \mathbf{V}_{22}^H \end{bmatrix}$$



§ 4.4 相干信号源的处理

前面基于谱的各种 DOA 估计算法，如 Capon 法、MUSIC 法、MN 法等，其构造空间谱的唯一依据是基于对阵列协方差的分析：

$$R_x = V(\theta)R_s V^H(\theta) + \sigma_n^2 J$$

其中 $R_s = E\{\mathbf{s}\mathbf{s}^H\}$ 是信号协方差矩阵。

若 \mathbf{s} 是由 D 个独立源组成，则 $\text{rank}\{R_s\} = D$ ，对 R_x 进行特征值分解就可以得到 D 个较大的特征值和 $N - D$ 个等于 σ_n^2 的特征值。 D 个较大的特征值对应的特征向量张成一个信号子空间，与由 $V(\theta)$ 的列矢量 $\mathbf{v}(\theta_k)$ ， $k = 1, \dots, D$ 所张成的子空间相同。根据信号阵簇矢量 $\mathbf{v}(\theta_k)$ 与噪声子空间的正交性，就可以确定 DOA。

但是，若 D 个信号值中有某些源是相干的（完全相关），即：

$$\rho = \frac{E\{s_i(t)s_j(t)\}}{\sqrt{E\{s_i^2(t)s_j^2(t)\}}} = 1$$



则 $\text{rank}\{R_s\} < D$ ，对 R_x 进行特征分解后较大的特征值数将小于 D ，与此相应的特征向量所展成的信号子空间维数将少于 $V(\theta)$ 的列数，使某些相干源的阵簇矢量 $\mathbf{v}(\theta_k)$ 不再正交于噪声子空间，所以有些源在空间谱曲线上将不出现峰值。

为了对相干源进行空间谱估计，**核心的问题**是如何把信号协方差矩阵 R_s 的秩恢复至等于信号源的个数 D 。即在进行空间谱估计前先对接收信号进行预处理，恢复 R_s 的秩即对源信号进行去相关处理，然后再用处理独立源的方法进行空间谱估计。

下面，将介绍**利用空间平滑法解相关的预处理**算法。

考虑由 N 个阵元构成的均匀线阵。对 D 个信号源，窄带传感器阵的接收信号矢量为：

$$\mathbf{x}(t) = V(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)$$

当进入阵列的 D 个信号源相干时，其信号协方差矩阵 R_s 的秩将小于 D 。



我们知道，对于均匀线阵，方向矩阵 $V(\theta)$ 是 $N \times S$ 维的 Vandermonde 矩阵，若将阵列向右（或向左）平移一个距离，则阵列接收矢量为：

$$\mathbf{x}'(t) = V(\theta)\Phi \cdot \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}'(t)$$

其中 $\Phi = \text{diag}\{e^{j\varphi_1} \quad \dots \quad e^{j\varphi_D}\}$ ， $\varphi_i = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_i$ 。

可见平移相当于把信号矢量旋转为 $\Phi\mathbf{s}(t)$ 。对这两个阵列的协方差矩阵求平均值，得：

$$R_x^f = \frac{1}{2} V(\theta) [R_s + \Phi R_s \Phi] V^H(\theta) + \mathbf{n}''(t)$$

$$R_s^f = R_s + \Phi R_s \Phi = E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \Phi \mathbf{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^H \\ \mathbf{s}^H \Phi \end{bmatrix} \right\}$$

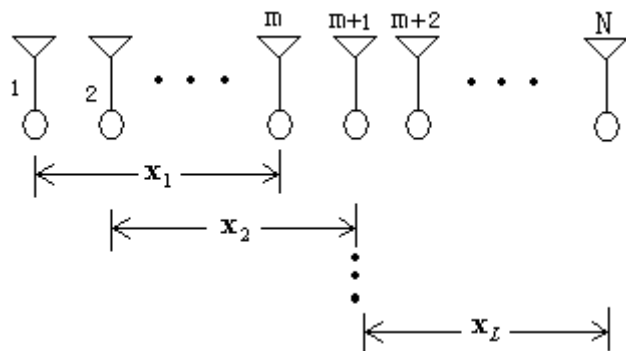
则此时两信号矢量组成的矩阵 $\begin{bmatrix} \mathbf{s} & \Phi \mathbf{s} \end{bmatrix}$ 的秩将增加 1，即 R_s^f 秩将比 R_s 的秩增加 1。

若将原阵列依次移 L 次，只要 $L \geq D$ ，则可将 D 个相干源的信号协方差矩阵的秩恢复为 D 。这就是空间平滑预处理算法相关的基本思想。

现在我们来考虑一般的情况。如图所示，我们把整个阵列分成 L 个子阵列，每个子阵列的



阵元数 $m > D$ ，每个子阵列从左逐步地右移。



每个子阵列的接收信号矢量为：

$$\mathbf{x}_1^f = [x_1 \quad \cdots \quad x_m]^T$$

$$\mathbf{x}_2^f = [x_2 \quad \cdots \quad x_{m+1}]^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}_l^f = [x_l \quad \cdots \quad x_{m+l-1}]^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}_L^f = [x_{N-m+1} \quad \cdots \quad x_N]^T$$

则第 l 个子阵列的接收信号矢量可表示为：



$$\mathbf{x}_l^f = V_m(\theta)\Phi^{(l-1)}\mathbf{s} + \mathbf{n}_l$$

其中 $V_m(\theta) = [\mathbf{v}_m(\theta_1) \cdots \mathbf{v}_m(\theta_0)]$ 为由 m 个阵元构成的子阵列的方向矩阵

$$\mathbf{v}_m(\theta_k) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\varphi_k} & \cdots & e^{j(m-1)\varphi_k} \end{bmatrix}^T, \quad \varphi_k = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta_k$$

$$\Phi = \text{diag}[e^{j\varphi_1} \quad \cdots \quad e^{j\varphi_D}]$$

$$\mathbf{s} = [s_1 \quad \cdots \quad s_D]^T$$

$$\mathbf{n}_l = [n_l \quad \cdots \quad n_{l+m-1}]^T$$

第 l 个子阵列的接收信号协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{x}_l}^f &= E\left\{\mathbf{x}_l^f \mathbf{x}_l^{fH}\right\} \\ &= V_m(\theta)\Phi^{(l-1)}R_s\Phi^{-(l-1)}V_m^H(\theta) + \sigma_n^2 I_m \end{aligned}$$

取 L 个子阵列的协方差的平均值, 即:



$$\begin{aligned}
 R_{\mathbf{x}}^f &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L R_{\mathbf{x}_l}^f = V_m(\theta) \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L V_m(\theta) \Phi^{(l-1)} R_s \Phi^{-(l-1)} V_m^H(\theta) + \sigma_n^2 I_m \\
 &= V_m(\theta) R_s^f V_m^H(\theta) + \sigma_n^2 I_m
 \end{aligned}$$

我们知道 $V_m(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\varphi_1} & e^{j\varphi_2} & \cdots & e^{j\varphi_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(m-1)\varphi_1} & e^{j(m-1)\varphi_2} & \cdots & e^{j(m-1)\varphi_D} \end{bmatrix}$ 是 Vandermonde 矩阵，其秩为

$\min(m, D)$ ，由于 $m > D$ ，故 $\text{rank}(V_m(\theta) R_s^f V_m^H(\theta)) = \text{rank}(R_s^f)$ 。

可以证明，若 $m > D$ ，且 $\text{rank}(R_s) = 1$ （即 D 个源完全相干），则当 $L \geq D$ 时 $\text{rank}(R_s^f) = D$ 。

[证明： $\because \text{rank}(R_s) = 1$

$$\therefore R_s = \mathbf{a} \mathbf{a}^H, \quad \mathbf{a} = [a_1 \quad \cdots \quad a_D]$$

将之代入 R_s^f 中，有：



$$R_s^f = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \Phi^{(l-1)} R_s \Phi^{-(l-1)} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [\Phi^{(l-1)} \mathbf{a}] [\Phi^{-(l-1)} \mathbf{a}]^H = \frac{1}{L} E E^H$$

式中 $E = [\mathbf{a} \quad \Phi \mathbf{a} \quad \dots \quad \Phi^{(L-1)} \mathbf{a}]$ ，显然 $\text{rank}(R_s^f) = \text{rank}(E)$ 。

E 可进一步等成：

$$E = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 e^{j\beta_1} & \dots & a_1 e^{j(L-1)\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_D & a_D e^{j\beta_D} & \dots & a_D e^{j(L-1)\beta_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_D & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\beta_1} & \dots & e^{j(L-1)\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j\beta_D} & \dots & e^{j(L-1)\beta_D} \end{bmatrix}$$

上面左边的矩阵满秩，右边的矩阵秩为 $\min(L, D) = D$ 。证毕]

从以上的分析可知，若子阵列的阵元数 $m > D$ ，且子阵个数 $L \geq D$ ，则通过上述空间平滑可将 D 个相干源转变为 D 个独立源，此时有效阵元数减少到 m 个。

若有 D 个完全相关的信号源进入阵列，则阵列中阵元个数最少应为：

$$N_{\min} = L + m - 1 = D + (D + 1) - 1 = 2D$$



若是 D 个独立源，则 N 最少为：

$$N_{\min} = D + 1$$

可见当利用空间平滑预处理算法处理 D 个相干源时，有效阵元数要牺牲 $D-1$ 个！

更一般地，可以证明，若有 D 个源，其中的 J 个源完全相关，若子阵中的阵元数 $m > D$ ，则当子阵个数 $L \geq J$ 时， $\text{rank}\{R_s^f\} = D$ 。此时最小阵元数

$$N_{\min} = L + m - 1 = J + (D + 1) - 1 = D + J$$

即有效阵元数要损失 $J-1$ 个。

以上的空间平滑算法又被称为前向平滑。尽管这种方法可以处理相干源，但牺牲的阵元数太多。为此，人们又提出了前后向组合的平滑技术，对 D 个信号源中有 J 个相干源的情况，

其最小阵元数 $N_{\min} = D + \frac{J}{2}$ 。

上述空间平滑技术只适用于均匀线阵。

以上介绍的空间平滑技术基于的是窄带阵模型。对于宽带阵，可以得到频域快拍模型及



相应的空间频谱矩阵:

$$S_{\mathbf{x}}(\omega) = V(\theta)S_{\mathbf{s}}(\omega)V^H(\theta) + \sigma_n^2 I$$

其中 $S_{\mathbf{x}}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{\mathbf{x}}(\tau)\}$, $S_{\mathbf{s}}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{\mathbf{s}}(\tau)\}$ 。

同样可将 N 个阵元构成的均匀线阵分成 L 个子阵, 求这 L 个子阵的频谱矩阵的平均值 $S_{\mathbf{x}}^f$, 在同样的条件下可证明 $S_{\mathbf{x}}^f$ 是满秩的, 故经空间平滑后可在频谱求空间谱峰值以获得 D 个信号源的 DOA 估计。

可见, [上述空间平滑算法适用于窄带和宽带阵, 但其代价为牺牲有效阵元](#), 这不仅使阵列能够估计的信号源数减少, 同时也增大了有效阵列的波束宽度。

实际上, 对于宽带的相干信号, 尽管对信号中的每个频谱点有 $\text{rank}\{R_{\mathbf{s}}\} = 1$, 但在整个频域内 $R_{\mathbf{s}}$ 的秩却未必为 1。

例如, 设有两个相干源信号 $s_1(t) = s(t)$, $s_2(t) = s(t - t_0)$, $t_0 > 0$, 则信号的相关矩阵为:



$$\begin{aligned}
 R_s(\tau) &= E\{\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t+\tau)\} = E\left\{\begin{bmatrix} s(t) \\ s(t-t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t+\tau) & s(t+\tau-t_0) \end{bmatrix}\right\} \\
 &= \begin{bmatrix} r(\tau) & r(\tau-t_0) \\ r(\tau-t_0) & r(\tau) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

其中 $r(\tau) = E\{s(t)s(t+\tau)\}$ 。

对上式两边做傅氏变换，有：

$$S_s(\omega) = \begin{bmatrix} s(\omega) & s(\omega)e^{-j\omega_a} \\ s(\omega)e^{j\omega_a} & s(\omega) \end{bmatrix}$$

可见 $S_s(\omega)$ 秩为 1。但是，若将 $S_s(\omega)$ 对 ω 进行积分，则

$$\int S_s(\omega) d\omega = \begin{bmatrix} r(0) & r(t_0) \\ r(t_0) & r(0) \end{bmatrix}$$

只要 $t_0 \neq 0$ ，上式就不是奇异的。换句话说，只要将所有频率成份的谱密度矩阵进行平均，得到的谱密度阵将不再是奇异的，这种方法称为**频域平滑技术**。



§ 4.5 性能分析

空间谱估计是从传感器阵接收数据中对多个变量进行的估计。一般来说，这是一个没有先验知识的估计。

对于没有先验知识的情况，在噪声背景中从观测数据里估计参量的最优方法是极大似然估计。**ML** 是一种渐近的有效估计，即估计的期望值等于真值（无偏的）且估计量与真值的均方误差最小（达到克拉美—罗下界）。其它任何估计方法是否有效，其衡量的标准是其统计偏差是否为 0，以及统计均方误差是否接近于 **ML** 估计均方误差的下限，即 **CRB**(Cramer-Rao Bound)。

空间谱估计的参量估计误差主要来源于采样数的有限，以及种算法本身。我们衡量某种算法时最关心的是：（1）其均方误差是否满足 **CRB**？（2）在采样数有限的条件下，其估计的统计偏差和均方误差是多少？➔影响多个信号源参量估计的分辨率。

设 $\mathbf{x}(k)$, $k = 1, \dots, K$ 是传感器接收数据， $\boldsymbol{\theta}$ 是待估参量，则 **CRB** 为：



$$\text{Var}\{\hat{\theta}_i\} \geq \varphi_{ii}$$

其中 φ_{ii} 为第 $\Phi = J^{-1}$ 的第 ii 个元素。 J 为 Fisher 信息矩阵：

$$J_{ij} = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln P(\mathbf{x} | \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}$$

若假设观测数据 $\mathbf{x}(k)$ 是统计独立的高斯平稳随机变量，则可得到 CRB 为：

$$\text{CRB}\{\hat{\theta}\} = \frac{1}{K} \left[\text{tr} \left\{ \frac{\partial R_{\mathbf{x}}}{\partial \theta_i} R_{\mathbf{x}}^{-1} \frac{\partial R_{\mathbf{x}}}{\partial \theta_j} R_{\mathbf{x}}^{-1} \right\} \right]$$

对于窄带阵，其阵列协方差矩阵可表示为：

$$R_{\mathbf{x}} = V(\theta) R_s V^H(\theta) + \sigma_n^2 I$$

对于 D 个独立源，上式又可写成：

$$R_{\mathbf{x}} = \sum_{m=1}^D P_m \mathbf{v}(\theta_m) \mathbf{v}^H(\theta_m) + \sigma_n^2 I$$

其中 $V(\theta) = [\mathbf{v}(\theta_1) \cdots \mathbf{v}(\theta_D)]$ ， P_m 为第 m 个信号源的功率。



将具有上述结构的 R_x 代入 CRB 公式中, 可得:

$$\text{CRB}\{\hat{\theta}_m\} = \left\{ \frac{1}{K} \frac{2P_m}{\sigma_n^2} \cdot \left[\text{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{v}^H(\theta_m)}{\partial \theta_m} P_N \frac{\partial \mathbf{v}(\theta_m)}{\partial \theta_m} \right) + O\left(\frac{\sigma_n^2}{P_k}\right) \right] \right\}^{-1}$$

其中 $P_N = I - V(\theta)(V^H(\theta)V(\theta))^{-1}V^H(\theta)$, $O(*)$ 表示高阶无穷小。

当存在多个信号源时, 我们不仅关心信号 DOA 估计的偏差和方差, 还很关心能否分辨两个信号源的 DOA——分辨力。

显然, 能否分辨两源与估计的偏差和方差大小有关。若两个源的入射角相差较大, 则分辨是显而易见的, 因此我们要讨论它们靠得多近才能分辨清楚。

若 $\hat{D}(\theta)$ 为零谱, 定义当满足下述条件时为分辨界限:

$$E\{\hat{D}(\theta_j)\} = E\{\hat{D}(\theta_m)\}, \quad j=1,2, \quad \text{式中 } \sin \theta_m = \frac{1}{2}(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \text{ 或 } \varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$



对两个等功率独立源，可得到达到分辨力界限所需的门限信噪比为：

$$SNR_T = \frac{1}{K} \left\{ 20(N-2)\Delta^{-4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{K}{5(N-2)} \Delta^2} \right] \right\}$$

其中 $\Delta = \frac{1}{\sqrt{3}} N \left(\frac{\pi d}{\lambda} \right) (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$ 。

从上式可见， Δ 越小，要分辨两个信号源所要求的信噪比也越高。

一般情况下，要得到上述 DOA 估计性能的解析式极为困难，故往往通过 Monte-Carlo 实验来分析以上性能。



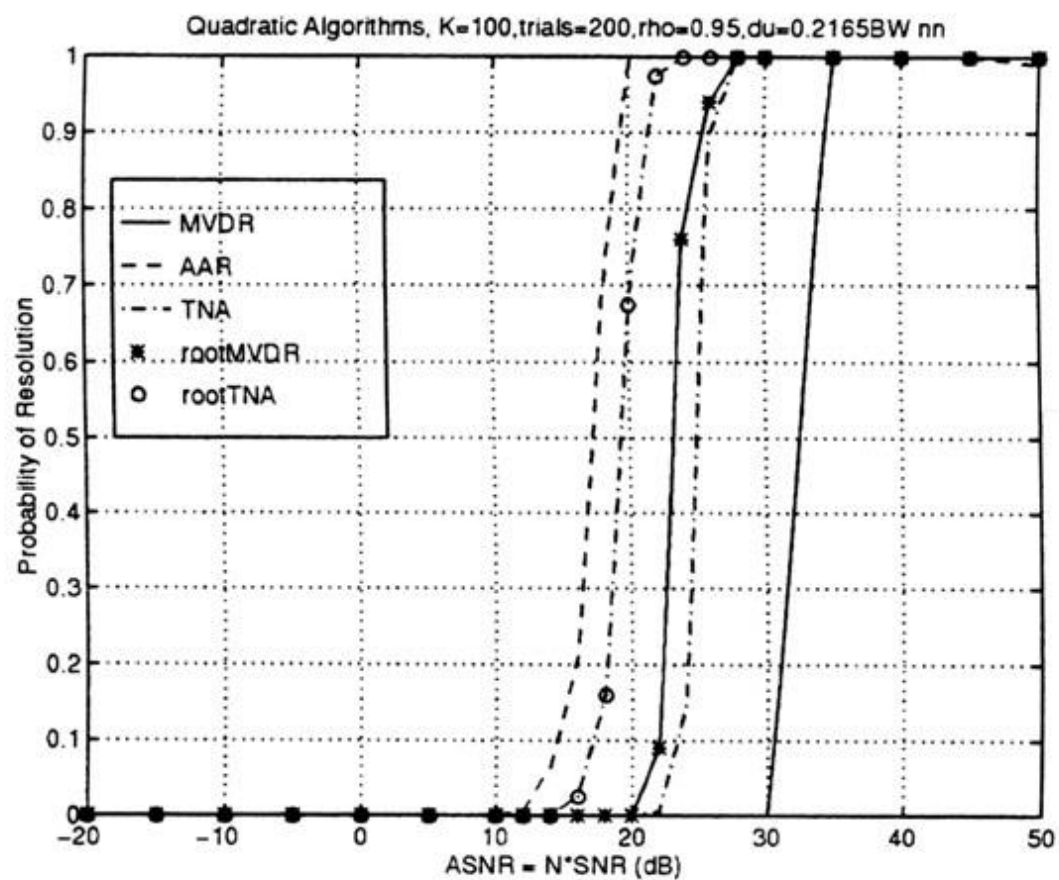


Figure 9.10: Quadratic algorithms: Probability of resolution vs. ASNR:
 $\Delta\psi = 0.2165BW_{NN}$, $\rho = 0.95$



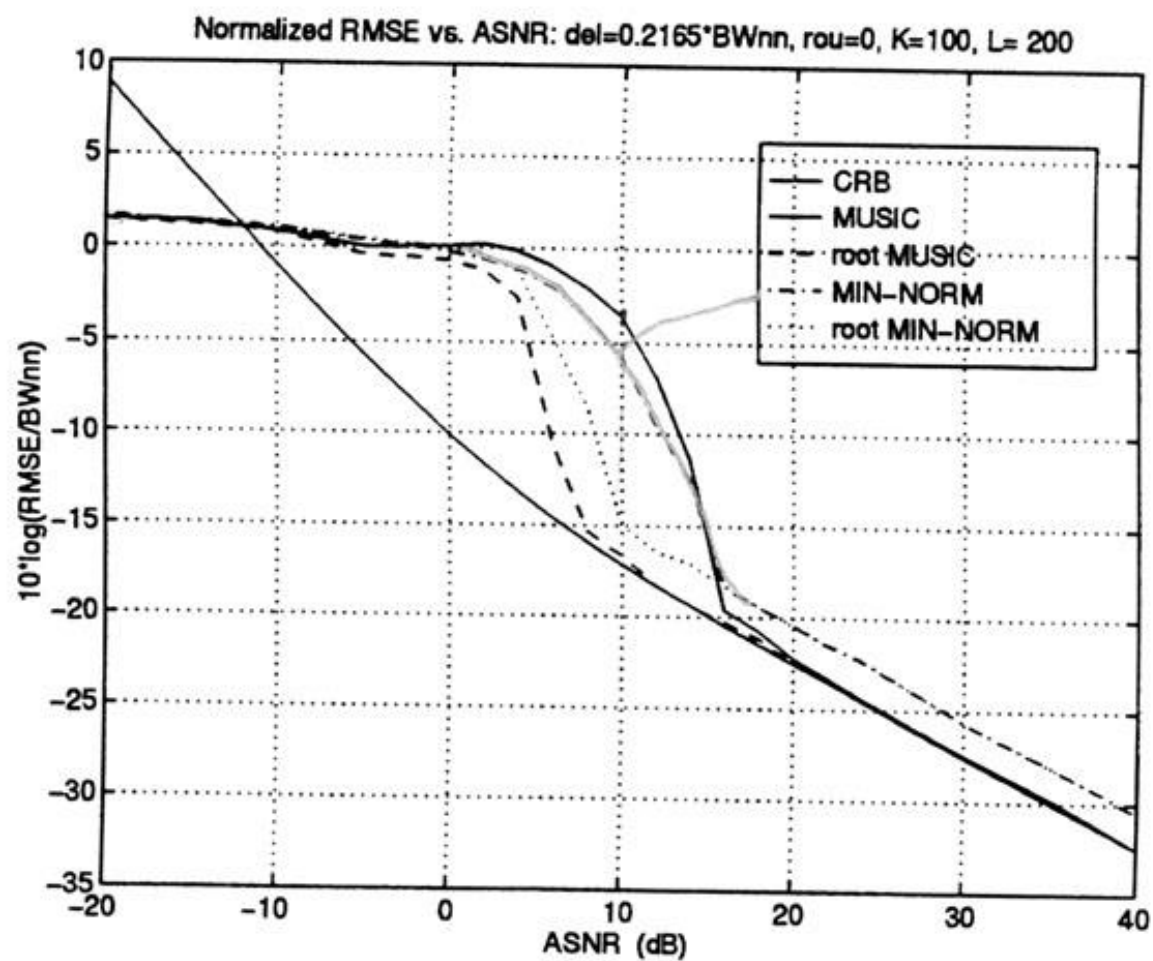


Figure 9.19: Normalized RMSE vs. ASNR: $\Delta\psi = 0.2165BW_{NN}$, $\rho = 0$, $K = 100$



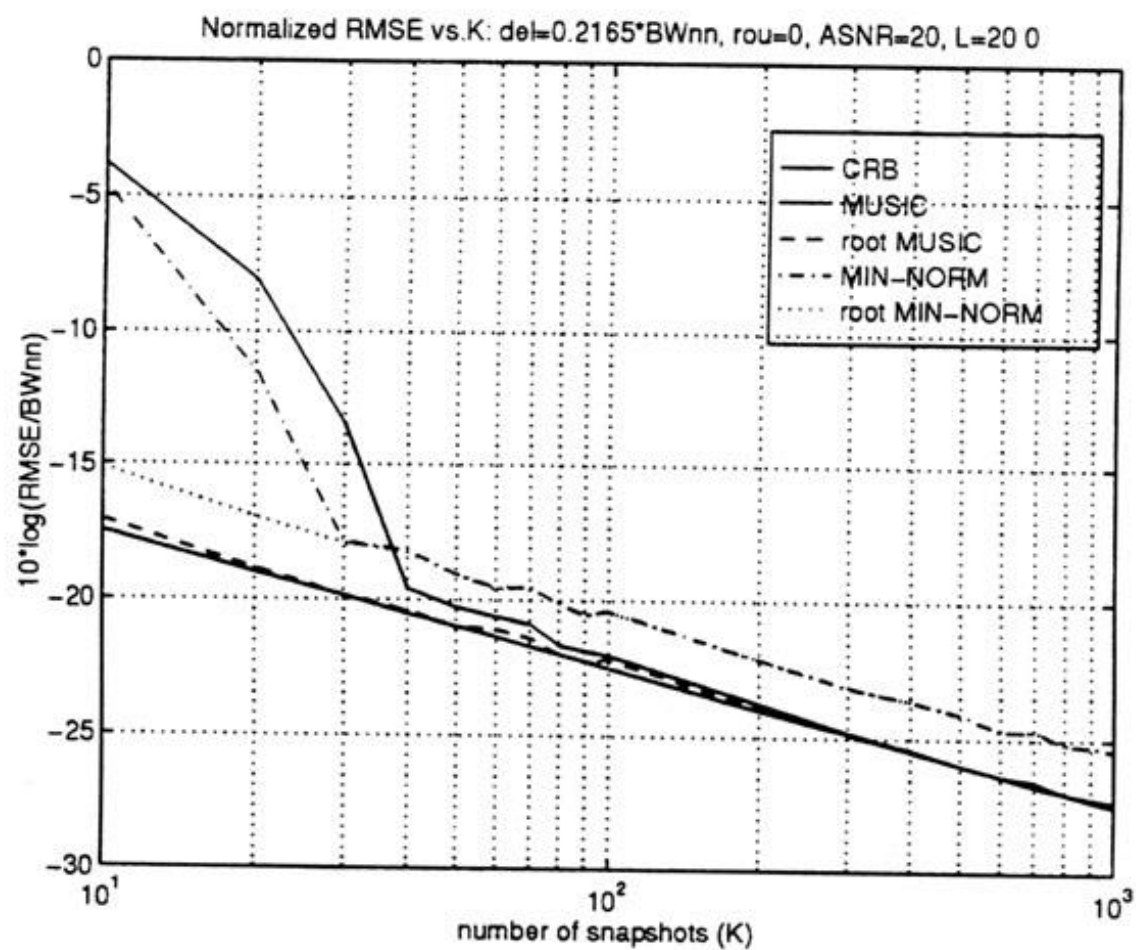


Figure 9.20: Normalized RMSE vs. K : $ASNR = 20dB$, $\Delta\psi = 0.2165BW_{NN}$, $\rho = 0$



时空信号处理试题

考虑一个由 10 个阵元组成的均匀线阵。设两个窄带不相关信号的到达角度分别为 θ_1 和 θ_2 。

试通过 Monte-Carlo 实验，在以下情况下分析各种 DOA 估计算法的性能。

1. $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_2 = 0.15$ 且 SNR=0dB、10dB、20dB 时，Bartlett 波束形成器算法、Capon 算法、MUSIC 算法和根 MUSIC 算法的瞬态性能；
2. $\theta_1 = 0$ 、 $\theta_2 = 0.15$ 且 K=100 时，上述算法随 SNR 变化的规律。
3. K=100 且 SNR=0dB、10dB、20dB 时，上述算法随 $\Delta\theta / \theta_{3dB}$ 变化的规律，其中 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ， $\theta_1 = 0$ 。

