

时空信号处理

信号与信息处理教研室 杨晨阳

82317213-101/F417

<http://welcom.buaa.edu.cn>

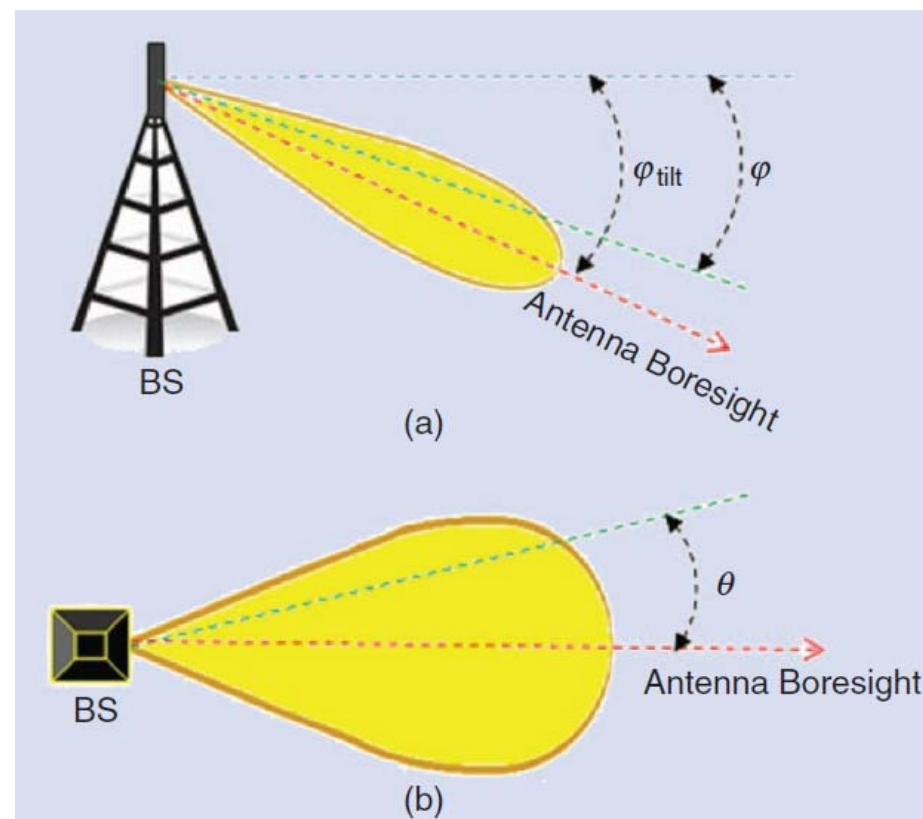
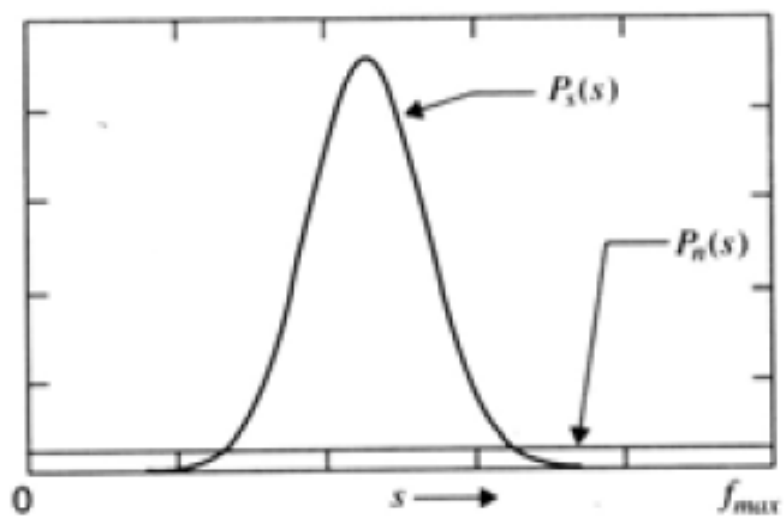
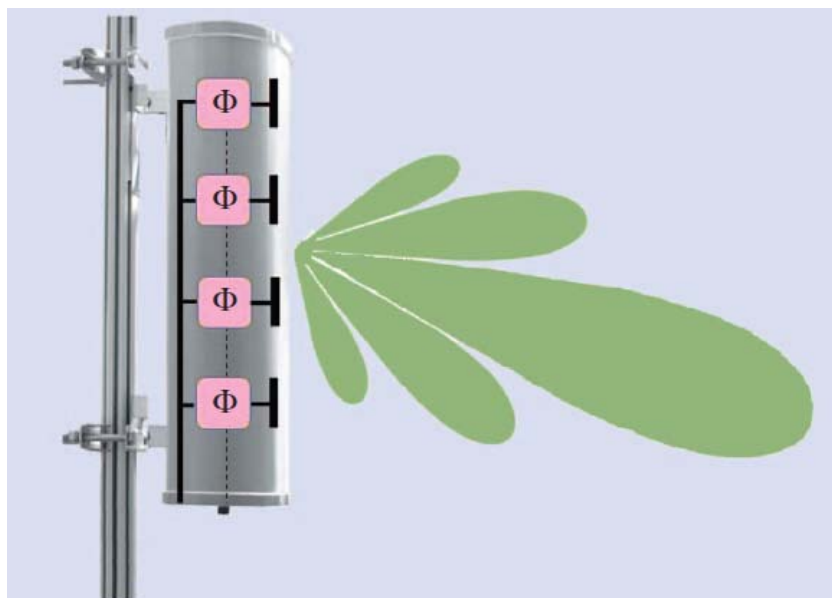
参考书目及文献：

- [1] 罗伯特 A. 蒙津戈等,《自适应阵导论》, 国防工业出版社, 1988.3。
- [2] 刘德树等,《空间谱估计及其应用》, 中国科技大学出版社, 1997。
- [3] H. L. Van Trees, *Array Processing: Detection and Estimation Theory IV*, John Wiley & Sons, 2002.

前修课：

随机过程、矩阵理论、数字信号处理、检测估计调制理论和自适应信号处理





背景简介:

✚ 阵列信号处理研究利用由多个传感器构成的阵列所采集的数据进行检测和估计，即

——→ 时空处理:

● 空间滤波或波束形成 ——解决信号检测问题 → 例如: 空间匹配滤波

● 空间信号到达方向 (DOA) 估计 ——解决参数估计问题 → 又称: 空间谱估计

✚ 时空滤波的基本问题: 提高信干噪比 (SINR)

自适应阵: 由传感器阵、方向图形成网络和实时自适应信号处理器组成

第一章: 经典波束形成, 阵列构形和空间滤波器与天线方向图之间的关系以及方向图合成

第二章: 最佳波束形成, 几种广泛应用的性能度量以及相应的稳态解

第三章: 自适应波束形成, 各种自适应算法的收敛性及阵列接收性能

✚ 空间谱估计的基本问题: 空间信号到达方向的高分辨率估计

第四章: 参数估计算法, 提高 DOA 估计精度、角度分辨力以及提高运算速度的算法



时空处理的对偶性与区别

时 — 空滤波的对偶

时间采样 —— 空间采样

频率 —— 角度

正弦信号 —— 点源信号

带限信号 —— 空间扩展源

时域窗 —— 阵元加权函数

频率响应 —— 天线方向图

时 — 空滤波的区别

通过增加时间采样提高性能 —— 难以通过增加空间采样提高性能（物理尺寸和造价限制）

—— 可以通过增加空-时采样来提高性能

时间采样为一维 —— 空间采样可以是一、二、三维



第一章 阵列与空间滤波

阵列天线的基本概念、阵列响应与空间滤波、均匀线阵、阵列定向、阵列的合成、窄带与宽带阵、波束域波束形成

第二章 最优波束形成

时空信号模型、最佳波束形成器、失配条件下的 MVDR/MPDR 波束形成器、线性限制最小功率/方差波束形成器、平方限制波束形成器、降维空间波束形成器、相干源的波束形成器

第三章 自适应波束形成

空间谱矩阵估计、采样矩阵逆波束形成器、递推最小二乘波束形成器、最小均方波束形成器、几种自适应算法的比较、部分自适应波束形成

第四章 空间参数估计算法

基于谱的 DOA 估计 (子空间法、投影矩阵法)、基于参数的 DOA 估计 (极大似然法、子空间拟合法、均匀线阵的估计)、相干信号源的处理、性能分析



第一章 阵列与空间滤波

§ 1.1 基本概念

——考虑阵列结构、加权系数对阵列接收性能的影响（以窄带平面波信号为例）。

一、相同传感器组成的二元阵

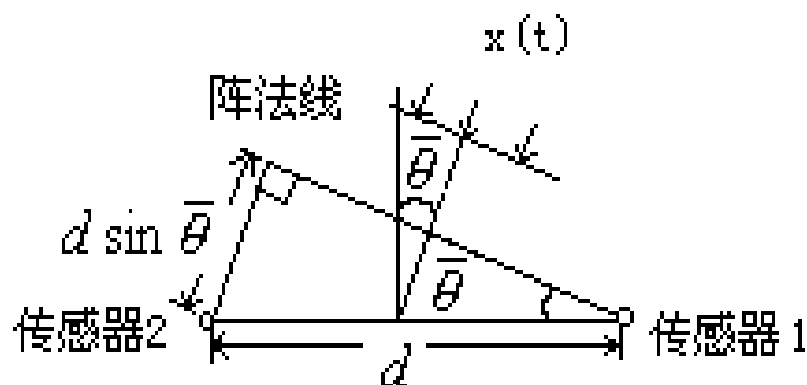


图 1(a) 阵列的几何关系

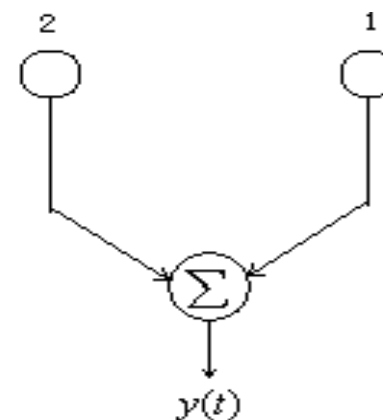


图 1(b) 阵列的发射/接收处理

如图所示的传感器阵，平面波信号 $x(t)$ 到达传感器 2 比到达传感器 1 延迟了时间 $\tau = \frac{d \sin \bar{\theta}}{v}$ 。



1、简单二元阵

令阵列输出信号 $y(t)$ 是二传感器单元输出信号之和，即：

$$y(t) = x(t) + x(t - \tau)$$

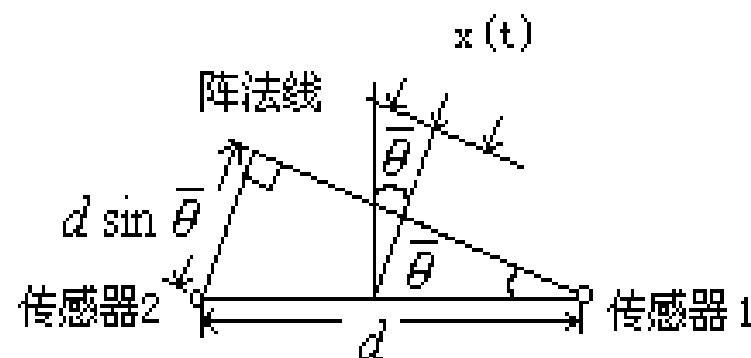
正弦信号

若 $x(t)$ 是一个窄带信号，其中心频率为 f_0 ，则延迟了时间 τ 相当于产生了相移

$$2\pi f_0 \cdot \frac{d \sin \bar{\theta}}{v} = \frac{2\pi d \sin \bar{\theta}}{\lambda}, \quad \text{其中 } \lambda = \frac{v}{f_0}$$

则传感器阵的总响应为：

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 x(t) e^{j(i-1)\varphi}, \quad \text{其中 } \varphi = \frac{2\pi d \sin \bar{\theta}}{\lambda}$$



可由下式求得阵列方向图 — 即在给定频率下天线输出对各方向的响应（参考：频率响应 $H(j\omega)$ ）：

$$A(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^2 e^{j(i-1)\varphi}$$

二元阵的归一化方向图为： $B(\bar{\theta}) = 20 \lg \left\{ \frac{|A(\bar{\theta})|}{2} \right\}$ (dB)



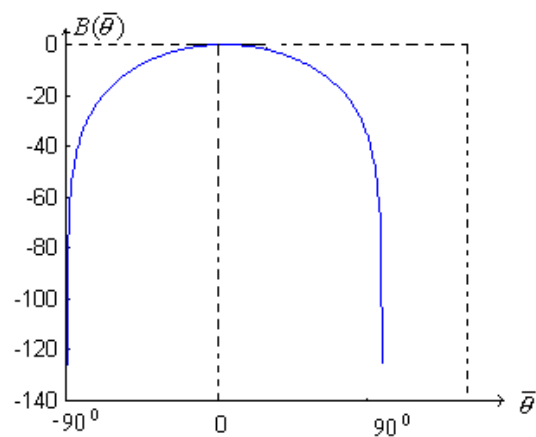


图 2(a) $d = 0.5\lambda$

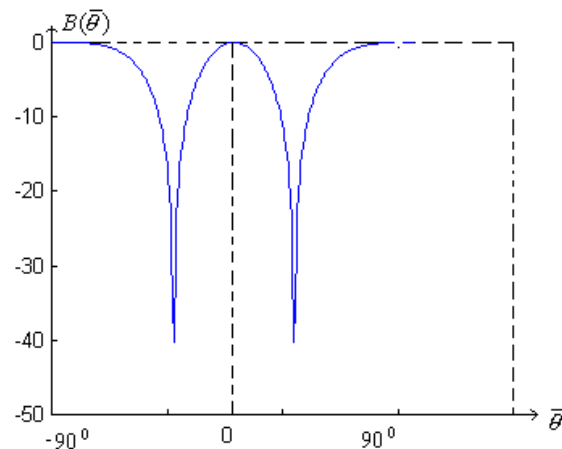


图 2(b) $d = \lambda$

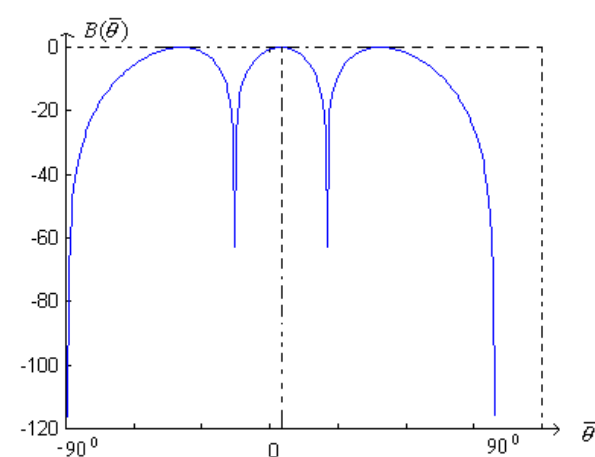


图 2(c) $d = 1.5\lambda$

图 2(a) 中 $\frac{d}{\lambda} = 0.5$, $\theta_{3dB} = 60^\circ$, 零陷在 $\bar{\theta} = \pm 90^\circ$ 方向, 因为在此处信号波前通过二个传感器的距离差 $d \sin \bar{\theta} = d = \lambda/2$, 即在二传感器处的接收信号有 $\frac{2\pi d \sin \bar{\theta}}{\lambda} = 180^\circ$ 相位差, 使得二者向量和完全对消。

图 2(b) 中 $d = \lambda$, $\theta_{3dB} = 25.67^\circ$, $\bar{\theta} = \pm 30^\circ$ 时发生零陷, 在 $\bar{\theta} = \pm 90^\circ$ 处出现两个与 $\bar{\theta} = 0^\circ$ 处主波束幅度相等的波束一称为栅瓣, 这是由于此时二传感器信号的相位差为 360° , 二传感器接收信号向量同相相加。

图 2(c) 中 $\frac{d}{\lambda} = 1.5$, $\theta_{3dB} = 16.7^\circ$, 在 $\bar{\theta} = \pm 19.5^\circ$ 时发生零陷, 在 $\bar{\theta} = \pm 90^\circ$ 方向出现两个零陷。

可见: d/λ 增加 \longrightarrow 分辨率增加, 零陷内移。



2、选择阵元复加权调整阵响应

➔ 既能加强期望信号的接收，又能抑制干扰信号

考虑下图所示的二元阵，每个阵元均是无方向性传感器，期望信号自阵法线方向 $\bar{\theta} = 0^\circ$ 传来， $x(t) = P_x \cdot e^{j\omega_0 t}$ ，干扰信号自 $\bar{\theta} = 30^\circ$ 方向传来， $I(t) = P_I \cdot e^{j\omega_0 t}$ 。为简单起见，假定干扰信号与期望信号有相同的频率 f_0 ，且设在阵的中点处干扰信号与期望信号同相。

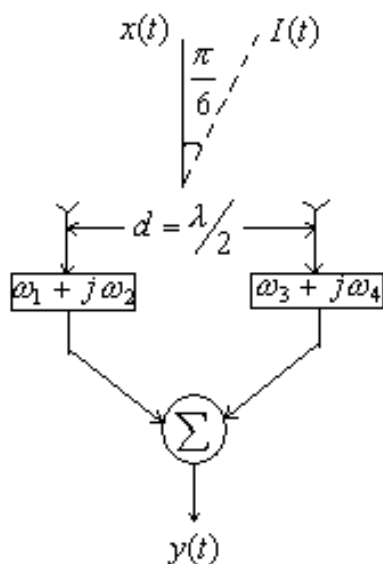


图 3(a) 复数加权二元阵

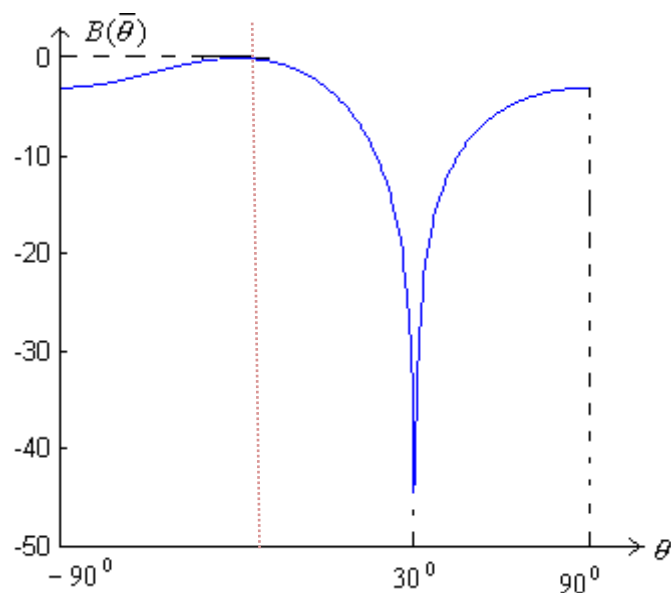


图 3(b) 干扰抑制二元阵的方向图



目的：调整各复加权系数来加强对信号 $x(t)$ 的接收，并同时使干扰 $I(t)$ 对输出的影响为零。

期望信号产生的阵列输出为：

$$y_d(t) = P_x \cdot e^{j\omega_0 t} [(\omega_1 + \omega_3) + j(\omega_2 + \omega_4)]$$

为使信号无失真通过阵列，即 $y_d(t) = Pe^{j\omega_0 t}$ ，必须使：

$$\omega_1 + \omega_3 = 1; \quad \omega_2 + \omega_4 = 0;$$

投射在左边单元上的干扰信号相对于阵中点的相位滞后 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \bar{\theta} = 2\pi(\frac{1}{4}) \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{4}$ ，投射在右

边单元上的干扰信号相对于阵中点的相位超前 $\frac{\pi}{4}$ ，故入射干扰产生的阵输出为：

$$\begin{aligned} y_I(t) &= P_I \cdot e^{j(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})} (\omega_1 + j\omega_2) + P_I \cdot e^{j(\omega_0 t + \frac{\pi}{4})} (\omega_3 + j\omega_4) \\ &= P_I \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\omega_0 t} (1 - j)(\omega_1 + j\omega_2) + P_I \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\omega_0 t} (1 + j)(\omega_3 + j\omega_4) \\ &= \frac{P_I}{\sqrt{2}} e^{j\omega_0 t} [(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) + j(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)] \end{aligned}$$



故为使阵的干扰信号输出为零，必须使：

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 = 0;$$

$$-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0$$

联立求解以上四个方程，可得：

$$\omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}, \quad \omega_4 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{天线方向图如图 3(b)所示。}$$

二、均匀幅度加权的均匀线阵

由 N 个等间距传感器单元组成的直线阵对窄带平面波信号 $x(t)$ 的阵列总响应为：

$$y(t) = \sum_{i=1}^N x(t) e^{j(i-1)\psi},$$

$$\text{其中 } \psi = \frac{2\pi d \sin \bar{\theta}}{\lambda}。$$

阵列的方向图为：

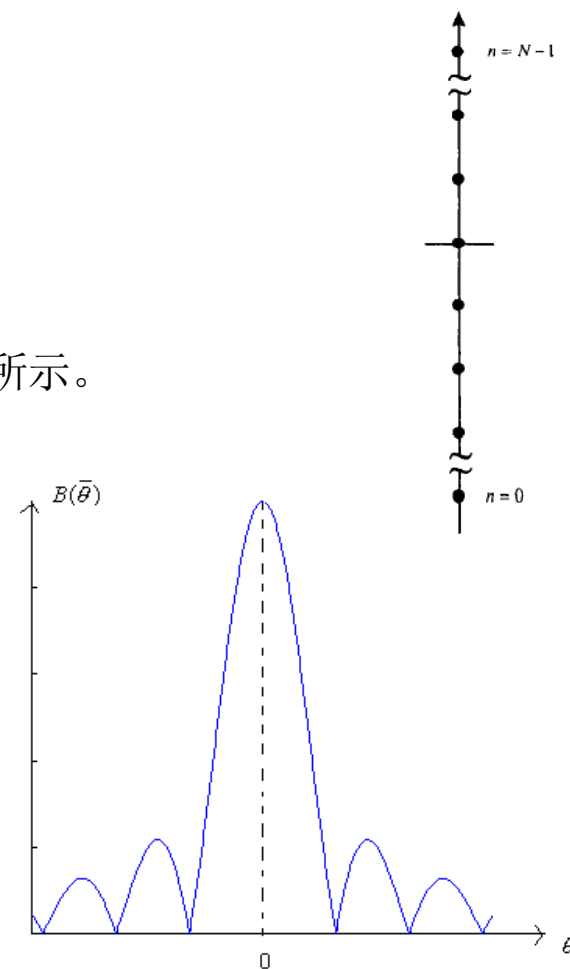


图 4 均匀加权均匀线阵的方向图



$$A(\bar{\theta}) = \sum_{i=1}^N e^{j(i-1)\psi} = N \cdot e^{j\frac{N-1}{2}\psi} \cdot \frac{\sin \frac{N}{2}\psi}{N \sin \frac{1}{2}\psi}$$

归一化方向图为（如图 4 所示）： $B(\bar{\theta}) = 20 \lg \left\{ \frac{|A(\bar{\theta})|}{N} \right\}$ (dB)

三、平面阵

下图所示的矩形平面阵由若干个离散传感器在 $x-y$ 平面上布置而成，坐标原点取在中心单元上。平行于 x 轴的每一行有 N_x 个单元，间距相等为 d_x ，平行于 y 轴的每一列有 N_y 个单元，间距相等为 d_y ，整个阵有 $N_x \times N_y$ 个单元。

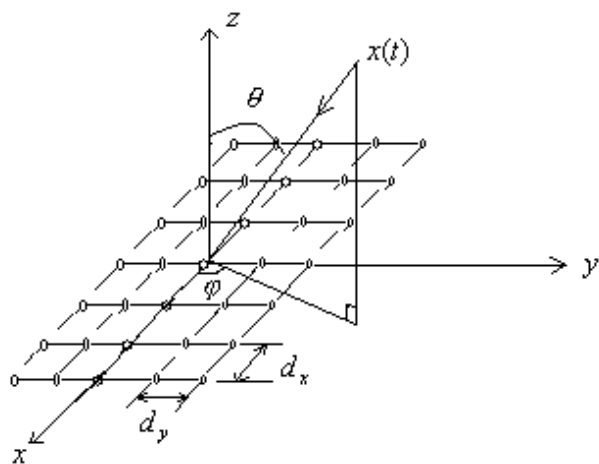


图 5(a) 均匀平面阵

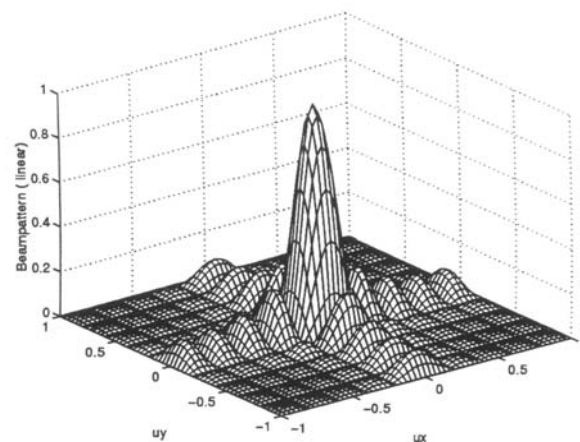


图 5(b) 均匀加权均匀面阵的方向图： $N_x=N_y=10$



每一行各阵元信号响应的向量和可用直线阵中所用的方法求出：

$$y_x(t) = \sum_{i=1}^{N_x} x(t) e^{j(i-1)\psi_x}, \quad \text{其中 } \psi_x = \frac{2\pi d_x \sin \theta \cos \varphi}{\lambda}$$

每一列各阵元信号响应的向量和为：

$$y_y(t) = \sum_{k=1}^{N_y} x(t) e^{j(k-1)\psi_y}, \quad \text{其中 } \psi_y = \frac{2\pi d_y \sin \theta \sin \varphi}{\lambda}$$

则所有阵元信号响应的总向量之和为：

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} x(t) e^{j(i-1)\psi_x} e^{j(k-1)\psi_y}$$

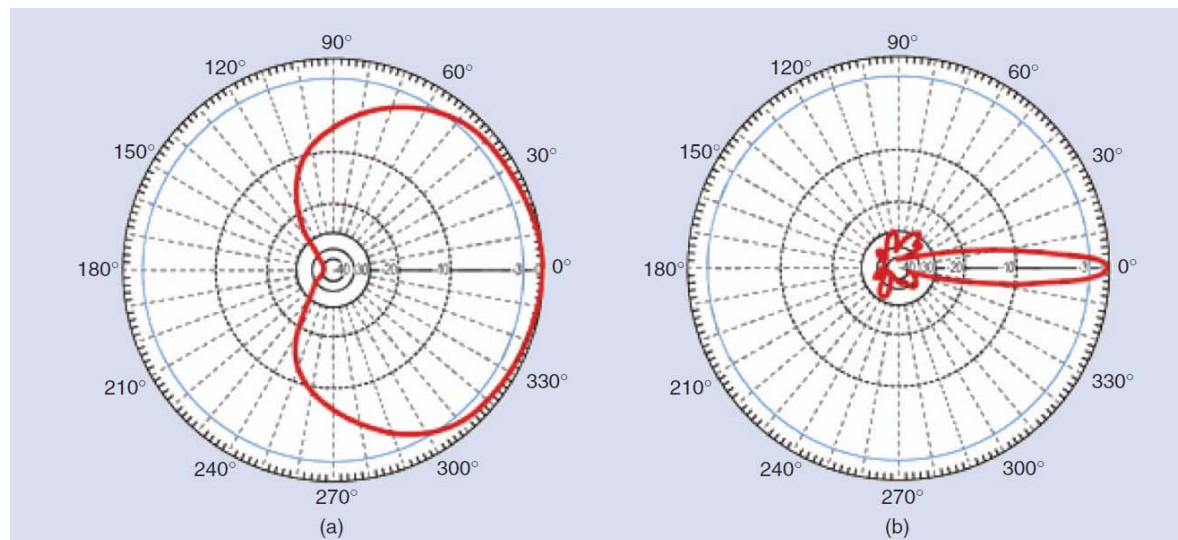
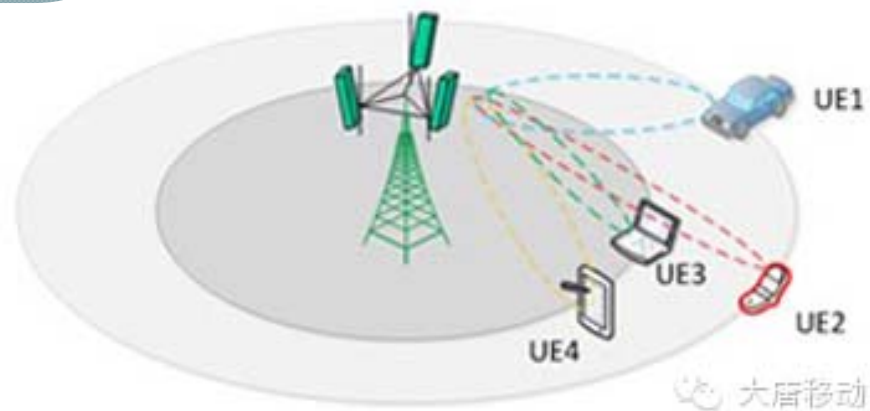
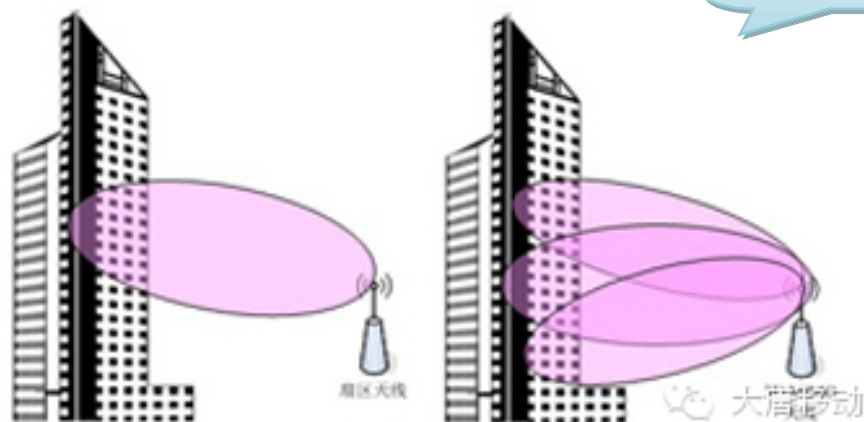
故阵列方向图为：

$$A(\theta, \varphi) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} e^{j(i-1)\psi_x} e^{j(k-1)\psi_y} = \sum_{i=1}^{N_x} e^{j(i-1)\psi_x} \sum_{k=1}^{N_y} e^{j(k-1)\psi_y} = A_x(\theta, \varphi) A_y(\theta, \varphi)$$

可见，对于上述阵元均匀分布的矩形平面阵，其方向图是一个沿 x 轴、另一个沿 y 轴的两个均匀直线阵的阵列因子之积。



例：3D MIMO



§ 1.2 阵列响应与空间滤波

考虑下图所示的传感器阵，由 N 个分别位于 $\mathbf{p}_n = [p_{x_n} \ p_{y_n} \ p_{z_n}]^T$ 的各向同性传感器组成。

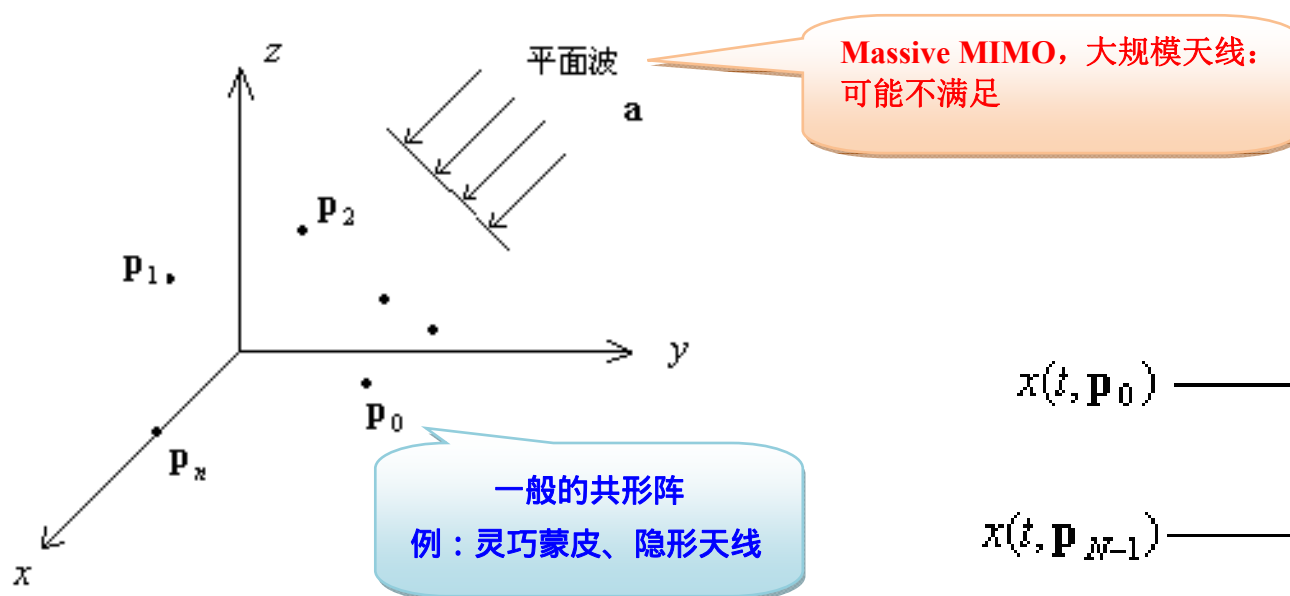


图 6(a) 一般的传感器阵

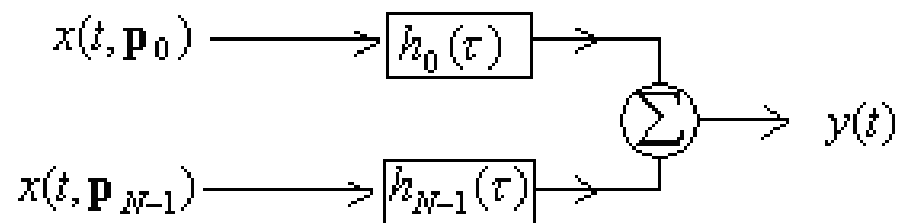


图 6(b) 发射/接收时空处理

$x(t)$ 为在坐标原点处接收到的**窄带**信号，其频谱为 $X(\omega)$ 。

\mathbf{a} 为表示图 6(a) 中单位平面波传播方向的单位矢量：



$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{i}_x \\ -\sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{i}_y \\ -\cos \theta \cdot \mathbf{i}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_x \cdot \mathbf{i}_x \\ -u_y \cdot \mathbf{i}_y \\ -u_z \cdot \mathbf{i}_z \end{bmatrix},$$

其中 u_x 、 u_y 和 u_z 是入射信号在 x 、 y 、 z 轴上的方向余弦，有负号是因 \mathbf{a} 指向原点。

则平面波信号到达第 n 个传感器单元时相对于到达坐标原点的传播时延为：

$$\tau_n = -\frac{1}{c} [u_x p_{x_n} + u_y p_{y_n} + u_z p_{z_n}], \quad \text{或可以写成: } \tau_n = \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{p}_n}{c}$$

在不同时刻 t ，各传感器接收的信号构成了时空序列（传感器阵相当于空间采样器）：

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(t, \mathbf{p}_0) \\ \vdots \\ x(t, \mathbf{p}_{N-1}) \end{bmatrix}$$

对每个传感器输出，用一个线性时不变滤波器 $h_n(\tau)$ 进行处理，并将其输出求和得到阵列输出 $y(t)$ ，则：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^T(t - \tau) \mathbf{x}(\tau, \mathbf{p}) d\tau$$



$$\text{其中, } \mathbf{h}(\tau) = \begin{bmatrix} h_0(\tau) \\ \vdots \\ h_{N-1}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(t - \tau_0) \\ \vdots \\ x(t - \tau_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}。$$

阵列输出 $y(t)$ 的频域形式为:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{X}(\omega)$$

$$\text{其中 } \mathbf{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \mathbf{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{p}) e^{-j\omega t} dt。$$

由 $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ 的定义, 其中每一项的频率特性为 (窄带特性):

$$X_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau_n) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \tau_n} \cdot X(\omega)$$

$$\text{定义波数为: } \mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a} = -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \cdot \mathbf{i}_x \\ \sin \theta \sin \varphi \cdot \mathbf{i}_y \\ \cos \theta \cdot \mathbf{i}_z \end{bmatrix}; \quad \text{当平面波在局部均匀介质中传播时, 只有波数 } \mathbf{k} \text{ 的}$$

$$\text{方向发生变化, 即: } |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$



又因为: $\tau_n = \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{p}_n}{c}$, 故: $\omega\tau_n = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \tau_n = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{p}_n}{c} = \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{p}_n$ 。

定义 $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_0} \\ \vdots \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_0} \\ \vdots \\ e^{-j\omega\tau_{N-1}} \end{bmatrix}$, 则 $\mathbf{X}(\omega)$ 可写为:

$$\mathbf{X}(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}),$$

其中 $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ 被称为 **阵簇矢量** 或 **阵列流形**, 包括了阵列的所有空间特性。

则阵列输出响应的频域形式为:

$$Y(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot X(\omega)$$

为了得到阵列的方向图, 即在给定频率下天线阵输出对各方向的响应, 考虑一个窄带、单位、平面波信号, 各阵列单元对这个信号的接收信号是频率和波数 \mathbf{k} 的函数:

$$x_n(t, \mathbf{p}_n) = e^{j(\omega t - \mathbf{k}^T \mathbf{p}_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad \text{或} \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = e^{j\omega t} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})$$



则对此信号（频域）的阵列输出响应为：

$$Y(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \gamma(\omega, \mathbf{k})$$

阵列的时空处理特性完全由上式决定。

称 $\gamma(\omega, \mathbf{k})$ 为阵列的**频率波数响应函数**，它描述了传感器阵对频率为 ω 、波数为 \mathbf{k} 的输入平面波信号的复增益，可视为一个线性时不变系时-空滤波器的传递函数。

天线方向图是上述 $\gamma(\omega, \mathbf{k})$ 随平面波信号入射角度变化的函数：

$$B(\omega, \theta, \phi) = \gamma(\omega, \mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a}(\theta, \phi)}$$

当输入平面波信号为复信号时，可把上述频率波数响应函数表示为更一般的复滤波的形式：

$$\gamma(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{W}^H(\omega) \mathbf{v}(\mathbf{k})$$

§ 1.3 均匀线阵

考虑线性阵列， N 个阵元均匀分布在 z 轴上。则阵元的位置为：



$$p_{z_n} = \left(n - \frac{N-1}{2}\right)d, \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad p_{x_n} = p_{y_n} = 0$$

此线阵的阵簇矢量为:

$$\mathbf{v}(k_z) = \begin{bmatrix} e^{j(\frac{N-1}{2})k_z d} \\ e^{j(\frac{N-1}{2}-1)k_z d} \\ \vdots \\ e^{-j(\frac{N-1}{2})k_z d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta} \\ e^{-j(\frac{N-1}{2}-1) \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta} \\ \vdots \\ e^{j\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta} \end{bmatrix}$$

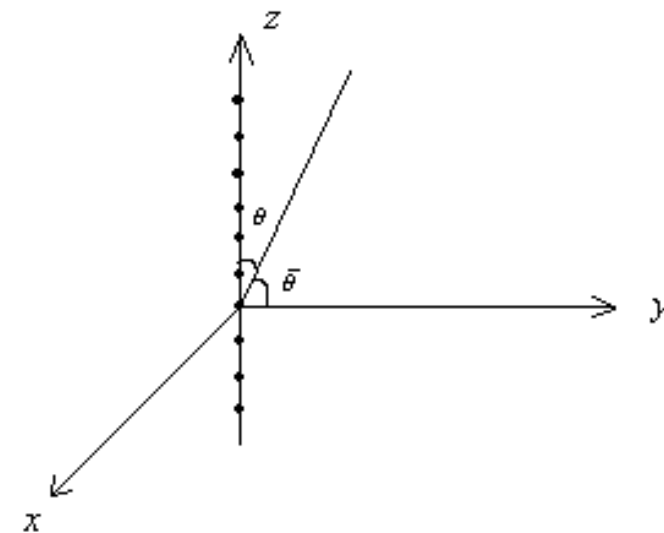


图 7 均匀线性阵列

其中 $k_z = |\mathbf{k}| \cdot \mathbf{a}_z = -\frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta$ 。

定义 $\psi = -k_z d = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} u_z \cdot d$, 其中 $u_z = \cos \theta$ 为 z 轴上的方向余弦, 阵簇矢量还可写成:

$$\mathbf{v}(\psi) = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} & e^{-j(\frac{N-1}{2}-1)\psi} & \dots & e^{j\frac{N-1}{2}\psi} \end{bmatrix}^T = e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\psi} & \dots & e^{j(N-1)\psi} \end{bmatrix}^T$$



为简化符号，省略加权函数对频率的依赖性，即 $\omega_n = W_n(\omega)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ ，并定义阵列波束形成网络的加权矢量为： $\mathbf{w}^H = [\omega_0^* \quad \omega_1^* \quad \dots \quad \omega_{N-1}^*]$

则均匀线阵的频率波数响应函数为：

$$\gamma(\omega, k_z) = \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(k_z) = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n^* \cdot e^{-j(n - \frac{N-1}{2})k_z d} \quad \text{或} \quad \gamma(\omega) = e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n^* \cdot e^{jn\psi}$$

相应地，天线方向图亦可表达成以下几种形式： $(\psi = -k_z d = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \cdot d = \frac{2\pi}{\lambda} u_z \cdot d)$

$$B(\theta) = e^{-j\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n^* e^{jn \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$B(\mu) = e^{-j\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \mu} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n^* e^{jn \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \mu}, \quad -1 \leq \mu \leq 1$$

$$B(\psi) = e^{-j\frac{N-1}{2} \cdot \psi} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n^* e^{jn \cdot \psi}, \quad -\frac{2\pi d}{\lambda} \leq \psi \leq \frac{2\pi d}{\lambda}$$



特例:

若对上述均匀线阵进行均匀加权, $\omega_n = \frac{1}{N}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, 则频率波数函数为:

$$\gamma(\psi) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(n - \frac{N-1}{2})\psi} = \frac{1}{N} e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\psi} = \frac{1}{N} e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} \cdot \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{N\psi}{2})}{\sin(\frac{\psi}{2})}$$

相应的天线方向图为:

$$B(\theta) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\frac{N}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \cdot d)}{\sin(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta \cdot d)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi;$$

$$B(\mu) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi Nd}{\lambda} \mu)}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} \mu)}, \quad -1 \leq \mu \leq 1; \quad B(\psi) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\frac{N\psi}{2})}{\sin(\frac{\psi}{2})}, \quad -\frac{2\pi d}{\lambda} \leq \psi \leq \frac{2\pi d}{\lambda}$$



天线最大方向（主瓣）位于 $\mu = 0$ 处。

有关参数：

- ① 3dB 波束宽度 ($HPBW$)
- ② 零点波束宽度 BW_{NN}
- ③ 旁瓣电平、旁瓣位置、旁瓣衰减率
- ④ 栅瓣

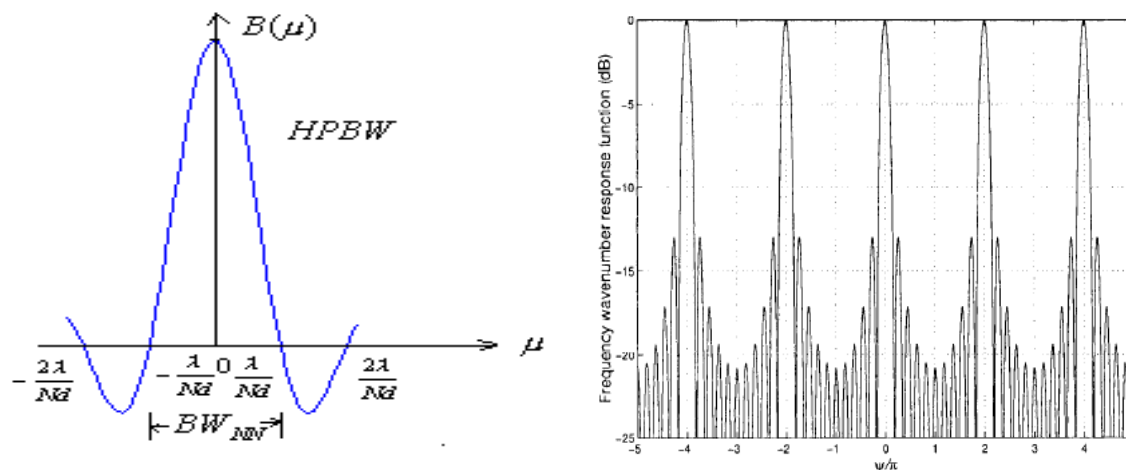


图 8 均匀加权均匀线阵的方向图

当 $d < \frac{\lambda}{2}$ 时，天线方向图只有一个主瓣，否则可能出现较大旁

瓣 — 其幅度甚至与主瓣相同，即栅瓣。

对于均匀加权的均匀线阵，可以求出其三分贝波束宽度近似为 ($N > 30$):

$$HPBW = 0.886 \frac{\lambda}{Nd}, \quad \text{当 } d = \frac{\lambda}{2} \text{ 时, } HPBW = 1.772 \frac{1}{N}$$

$$\text{在正弦空间的零点波束宽度为: } BW_{NN} = \frac{2\lambda}{Nd} = 2.3HPBW, \quad \text{当 } d = \frac{\lambda}{2} \text{ 时, } BW_{NN} = \frac{4}{N}$$



零点波束宽度又被称为瑞利分辨极限，是度量阵列分辨两个不同平面波的能力。

考虑 ψ 空间的天线方向图：
$$B(\psi) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\frac{N\psi}{2})}{\sin(\frac{\psi}{2})}$$

当上式的分子为1时，即达最大值时，将近似出现旁瓣，即：

$$\sin(\frac{N\psi}{2}) = 1 \rightarrow \frac{N\psi}{2} = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2, \dots \rightarrow \psi = \pm \frac{2m+1}{N} \pi \quad \text{或} \quad u = \pm \frac{2m+1}{N} \cdot \frac{\lambda}{2d} \quad \text{即}$$

为出现旁瓣的位置。当 $m=1$ 时，出现第一旁瓣的位置为 $\psi = \pm \frac{3\pi}{N}$ ，电平为：

$$B(\pm \frac{3\pi}{N}) \approx \frac{1}{N \sin(\frac{3\pi}{2N})} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{3\pi} = -13.5\text{dB}$$

方向图中的第一旁瓣电平随着阵元数 N 的增加而减小， $N=5$ 时为-12dB， N 相当大时趋近于-13.5dB。



当 $B(\psi)$ 式中的分子与分母均为 1 时，将出现**栅瓣**，即：

$$\frac{\psi}{2} = \pm m \cdot \pi \rightarrow \psi = \pm 2m \cdot \pi \quad \text{或} \quad u = \pm m \cdot \frac{\lambda}{d}, \quad \text{或}$$

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \bar{\theta}_m = \pm 2\pi m; \quad \rightarrow \quad \sin \bar{\theta}_m = \pm \frac{\lambda}{d} m$$

因 $|\sin \bar{\theta}_m| \leq 1$ ，故只有在 $d \geq \lambda$ 时才可能出现栅瓣。当 $d = \lambda$ 时， $\bar{\theta}_{m_{1,2}} = \pm 90^\circ$ ；当 $d = 2\lambda$ 时， $\bar{\theta}_{m_{1,2}} = \pm 30^\circ$ ， $\bar{\theta}_{m_{3,k}} = \pm 90^\circ$ 。在系统设计中为了避免出现栅瓣（会引起模糊），常选择 $d < \frac{\lambda}{2}$ 。

§ 1.4 阵列定向

实际系统：机械扫描、电扫描

只有当各天线阵元收到的信号之间没有时延差（或对窄带阵没有相移）时，其信号之和才能达到最大。

传统的波束形成器通过延迟相加网络，使阵列输出响应等于输入信号，即使输入平面波信号无失真地通过阵列。此时加权函数为：



$$\omega_n(\tau) = \frac{1}{N} \delta(\tau + \tau_n) \rightarrow y(t) = x(t)$$

即把输入信号 $x(\tau - \tau_n)$ 在时间上延迟对准之后再相加，这时：

$$\mathbf{W}^H(\omega) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_d), \quad \text{其中 } \mathbf{k}_d = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a}_d \text{ 为期望信号的波数，对应于信号的入射角度 } \theta_d \text{ 和 } \varphi_d。$$

这种传统波束形成器的天线方向图为：

$$B(\omega, \theta, \varphi) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_d) \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\theta_d, \varphi_d) \mathbf{v}(\theta, \varphi)$$

可见传统波束形成器实际上就是对波数为 \mathbf{k}_d 的平面波信号的空间匹配滤波。

一般地：在波束形成网络中引入使时延对准的因子，即引入如下的 $N \times N$ 对角定向矩阵：

$$I(\mathbf{k}_d) = \begin{bmatrix} e^{j\mathbf{k}_d^T \mathbf{p}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j\mathbf{k}_d^T \mathbf{p}_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & e^{j\mathbf{k}_d^T \mathbf{p}_N} \end{bmatrix}$$

各阵元接收的信号首先经过此定向矩阵在时间上对齐，而后再经过加权因子 $\mathbf{w}(\omega)$ 进行空间滤波。即先定向，后滤波。



若采用均匀幅度加权，则上述两步过程可简化为一步，即采用如下的加权函数：

$$\mathbf{w} = \frac{1}{N} \mathbf{v}(\mathbf{k}_d)$$

此时天线方向图即为传统波束形成器的方向图： $B(\mathbf{k} : \mathbf{k}_d) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_d) \mathbf{v}(\mathbf{k})$

对于 § 1.3 节讨论的 z 轴上的线阵，传统的天线方向图又可写成：

$$B(\xi : \psi_d) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\psi_d) \mathbf{v}(\psi), \quad B(\mu : \mu_d) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mu_d) \mathbf{v}(\mu)$$

其中 $\psi = -k_z d = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta$, $\mu = \cos \theta$ 。

对于均匀线阵 $\mathbf{v}(\psi) = e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\psi} & \dots & e^{j(N-1)\psi} \end{bmatrix}^T$ ，则均匀线阵的传统波束形成器方向图为：

$$B(\psi : \psi_d) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(N \frac{\psi - \psi_d}{2})}{\sin(\frac{\psi - \psi_d}{2})}, \quad B(\mu : \mu_d) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi N d}{\lambda} (\mu - \mu_d))}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} (\mu - \mu_d))} \quad \text{—— 正弦空间}$$



$$B(\theta : \theta_d) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi Nd}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta_d))}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta_d))}$$

—— 角度空间

观察 ψ 空间和 μ 空间（正弦空间）的天线方向图可见，无论 ψ_d 或 μ_d 是什么，方向图只是最大值移到 ψ_d 或 μ_d 处，其形状却不变化。而在 θ 空间（角度空间）中，天线方向图的形状都依赖于 $\cos \theta$ 。

在**正弦空间**中，左、右半功率点分别为：

$$\mu_R = \mu_d + 0.443 \frac{\lambda}{Nd}; \quad \mu_L = \mu_d - 0.443 \frac{\lambda}{Nd}$$

故半功率点波束宽度为 $\theta_{3dB} = 0.886 \frac{\lambda}{Nd}$ ，与 μ_d 无关。

而在**角度空间**中，左、右半功率点分别对应于：

$$\cos \theta_R = \cos \theta_d + 0.443 \frac{\lambda}{Nd}; \quad \cos \theta_L = \cos \theta_d - 0.443 \frac{\lambda}{Nd}$$

故半功率点波束宽度为：



$$\theta_{3dB} = \theta_R - \theta_L = \arccos\left[\cos\theta_d + 0.443\frac{\lambda}{Nd}\right] - \arccos\left[\cos\theta_d - 0.443\frac{\lambda}{Nd}\right], \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta_L, \theta_R > 0$$

可见，当波束在阵的法线方向($\theta_d = 90^\circ$)时，波束最窄，越偏离法线方向主瓣展宽的越厉害。

当 $B(\psi)$ 式中分子与分母均为1时，将出现栅瓣，即：

$$\frac{\psi - \psi_d}{2} = \pm m \cdot \pi \rightarrow \psi = \pm 2\pi m + \psi_d \quad \text{或} \quad \frac{2\pi d}{\lambda} \cos\theta_m = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\bar{\theta}_m = \pm 2\pi m + \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\bar{\theta}_{\max}。$$

$$\text{因} |\sin\bar{\theta}_m| \leq 1, \text{ 故出现栅瓣的条件为: } d \geq \frac{m\lambda}{1 + |\sin\bar{\theta}_{\max}|}$$

$$\text{故在波束扫到}\bar{\theta}_{\max}\text{时仍不出现栅瓣的条件是: } d < \frac{m\lambda}{1 + |\sin\bar{\theta}_{\max}|}$$

注意：上面为阵列定向而采用的权函数 $\mathbf{w} = \frac{1}{N} \mathbf{v}(\mathbf{k}_d)$ ，可知对第 i 个阵元接收信号的加权值为：

$$w_i = e^{-j(i-1)\psi_d}$$

即对幅度不加权（或均匀加权），只对各阵元进行连续相位滞后加权，可得到阵列输出为：



$$y(t) = \sum_{i=1}^N w_i \cdot x(t) \cdot e^{j(i-1)\psi} = \sum_{i=1}^N x(t) \cdot e^{j(i-1)(\psi - \psi_d)} = Nx(t)e^{j\frac{N-1}{2}(\psi - \psi_d)} \frac{\sin(N\frac{\psi - \psi_d}{2})}{N\sin(\frac{\psi - \psi_d}{2})}$$

此即**相控阵的基本原理**：

— 在波束形成网络中只进行相位加权 ➔ 改变阵列指向，不改变波束形状。

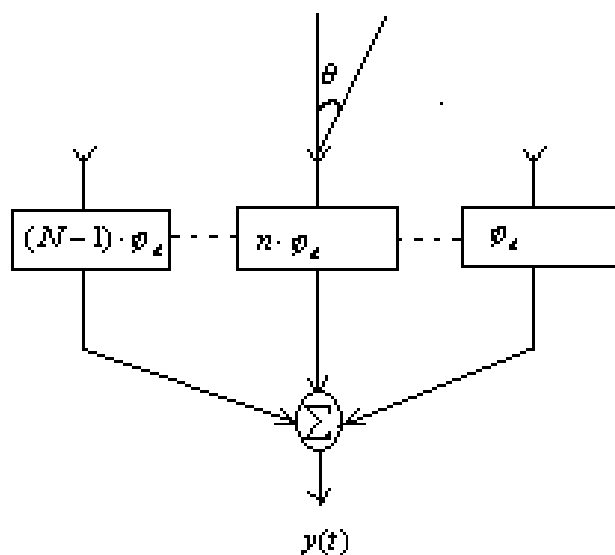


图 9 相控阵原理

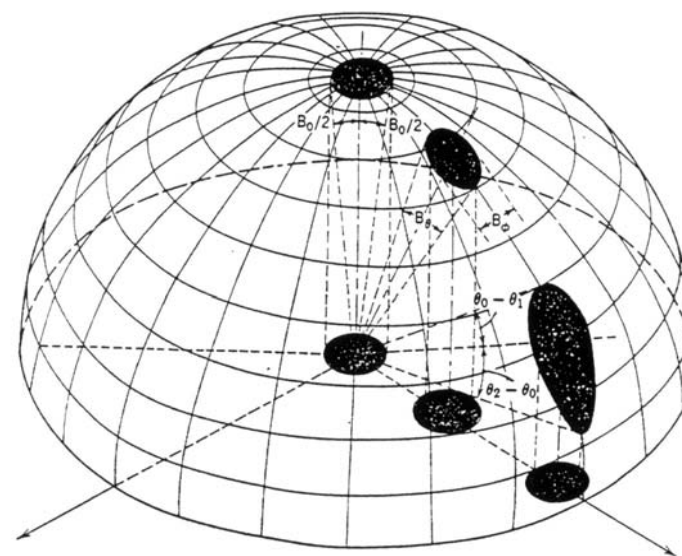


图 10 球坐标系中的天线波束



§ 1.5 阵列的合成

一、频率波数响应函数与加权函数的关系

由 § 1.3 可见，对于由 N 个单元组成的均匀线阵， $\gamma(\psi)$ 实际上是加权函数的离散傅里叶变换：

$$\gamma(\psi) = e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} w_n^* e^{jn\psi}$$

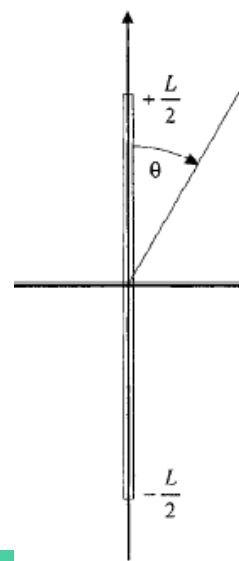
对于长度为 L 的线性孔径，假设其指向孔径法向，孔径加权函数为 $w_a^*(z)$ ，则频率波数响应函数为：

$$\gamma(\omega, k_z) = \int_{-L/2}^{L/2} w_a^*(z) e^{-jk_z z} dz$$

其中的指数项 $e^{-jk_z z}$ 是阵簇函数，与线性阵列中的阵簇矢量相对应。

由于 $w_a^*(z) = 0, |z| > L/2$ ，因此 $\gamma(\omega, k_z)$ 与 $w_a^*(z)$ 互为复里叶变换的关系：

$$\gamma(\omega, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} w_a^*(z) e^{-jk_z z} dz \longleftrightarrow w_a^*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\omega, k_z) e^{jk_z z} dk_z$$



对于均匀加权的线性孔径，天线方向图为：

$$B(u) = \text{sinc}\left(\frac{\pi L}{\lambda} u\right), \quad -1 \leq u \leq 1$$

若线性孔径长度与线性阵列等效长度相等： $L = Nd$ ，则二者将有同样的主瓣波束宽度和零点间距。若对线性孔径以 d 为间隔均匀采样，得到的线阵与线性孔径的天线方向图一般是不同的，一般二者的主瓣特性很相近，但旁瓣特性不同。若要利用空间采样阵列逼近孔径的性能，则需要很小的采样间隔。

考虑时频关系与 $\omega_n - \gamma(\psi)$ 关系之间的如下**对偶性**：

对时间采样加权 $h_n \xrightarrow{DFT}$ 频域滤波器的频率响应 $H(\omega)$

对空间采样加权 $w_n \xrightarrow{DFT}$ 空间滤波器的频率波数响应 $\gamma(\psi)$

→ 时域FIR滤波器设计中的窗函数及设计方法都可以应用

二、谱加权

目的：利用窗函数进行幅度加权以控制天线方向图的旁瓣。



—— 常用的窗函数

- 矩形窗: $w_n = \frac{1}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$
- 余弦窗: $w_n = \frac{1}{N} \cos(\pi \frac{n}{N}), \quad n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$
- 汉明窗: $w_n = 0.54 + 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{N}), \quad n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$
- **Blackman – Harris** 窗: $w_n = 0.42 + 0.5 \cos(2\pi \frac{n}{N}) + 0.08 \cos(4\pi \frac{n}{N}), \quad n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$

用上述几种窗函数作为幅度加权函数时, 得到的方向图参数如下 ($d = \frac{\lambda}{2}$):

加权函数	$HPBW$	BW_{NN}	第一旁瓣电平
矩形窗	$0.866 \frac{2}{N}$	$2 \frac{2}{N}$	$-13.2dB$
余弦窗	$1.19 \frac{2}{N}$	$3 \frac{2}{N}$	$-23.5dB$



汉明窗	$1.31 \frac{2}{N}$	$4 \frac{2}{N}$	$-39.5dB$
<i>Blackman-Harris</i> 窗	$1.65 \frac{2}{N}$	$6 \frac{2}{N}$	$-56.6dB$

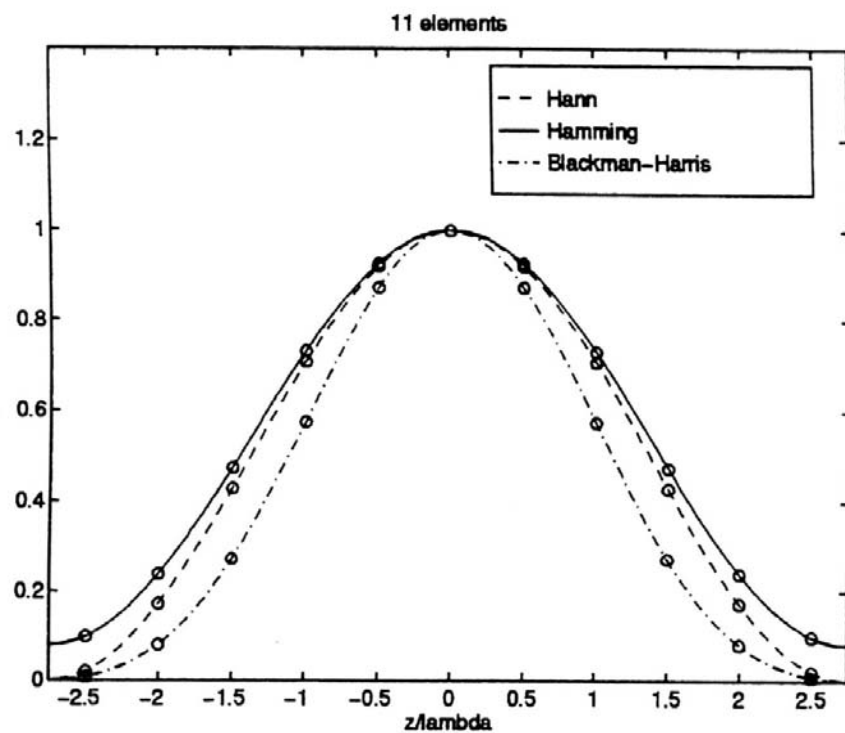


图 10(a) Hann、Hamming、Blackman=Harris 窗函数

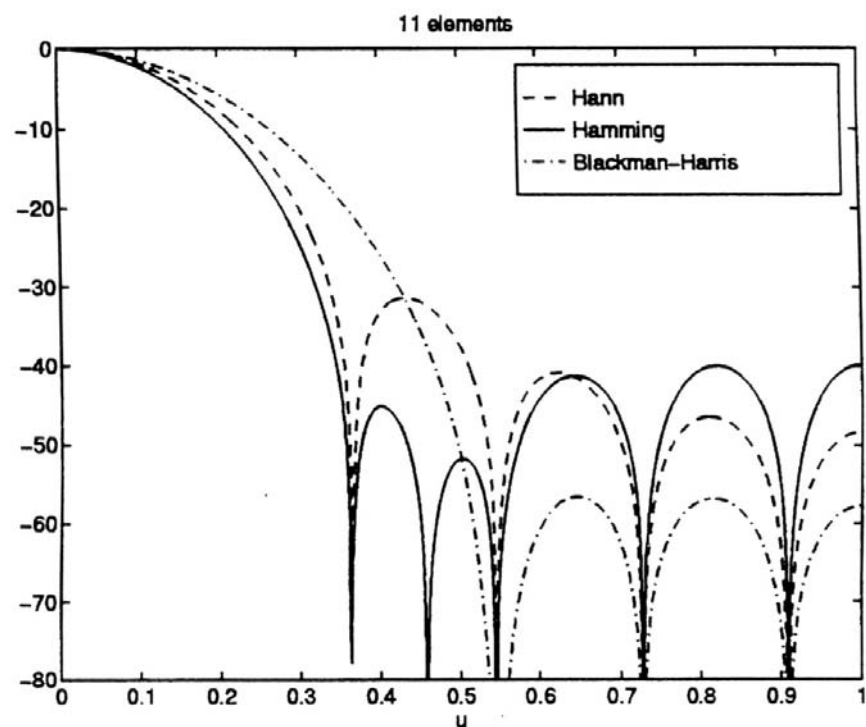


图 10(b) 相应的天线方向图, $N=11$



三、椭球函数加权

这种加权函数的设计目标是使在一个给定角度区域内的总功率比例最大，即使下述比值最大：

$$\alpha = \frac{\iint_{\Omega} |B(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} |B(\theta, \varphi)|^2 d\varphi}; \quad \text{其中 } \Omega \text{ 是以主波束为中心的一个角度区域。}$$

对于线阵，上述比值可写为：

$$\alpha = \frac{\int_{-\psi_0}^{\psi_0} |B(\psi)|^2 d\psi}{\int_{-\pi}^{\pi} |B(\psi)|^2 d\psi}, \quad \text{其中 } \psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \theta。$$

因为 $B(\psi) = \gamma(\omega, \psi) = \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\psi) = e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n^* e^{jn\psi}$ ， $-\frac{2\pi d}{\lambda} \leq \psi \leq \frac{2\pi d}{\lambda}$ ，故上述比值的分子

和分母分别可以写为：

$$\alpha_N = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} |B(\psi)|^2 d\psi = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\psi) \cdot \mathbf{v}^H(\psi) \cdot \mathbf{w} d\psi = \mathbf{w}^H \cdot \left[\int_{-\psi_0}^{\psi_0} \mathbf{v}(\psi) \cdot \mathbf{v}^H(\psi) d\psi \right] \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \cdot A \cdot \mathbf{w}$$

$$\alpha_D = \int_{-\pi}^{\pi} |B(\psi)|^2 d\psi = \mathbf{w}^H \cdot B \cdot \mathbf{w}$$



其中 $A = \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \mathbf{v}(\psi) \cdot \mathbf{v}^H(\psi) d\psi$, $B = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}(\psi) \cdot \mathbf{v}^H(\psi) d\psi = 2\pi \cdot I$ 。

则根据 Adaptive Filter Theory, 3rd Edition, 第 4 章 特征分析 4.2 节性质 9—式(4.64), 可得使比值 α 最大的加权向量如下:

$$\alpha = \frac{\mathbf{w}^H \cdot A \cdot \mathbf{w}}{2\pi \cdot \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{w}} \quad \rightarrow \quad \alpha \cdot 2\pi \cdot \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \cdot A \cdot \mathbf{w} \quad \rightarrow \quad 2\pi \cdot \alpha \cdot \mathbf{w} = A \cdot \mathbf{w}$$

可见, 通过寻找矩阵 A 的特征值和特征向量、并选择最大特征值所对应的特征向量作为加权向量, 即可使一个给定角度区域内的总功率比例最大:

$$2\pi\lambda \cdot \mathbf{w} = A \cdot \mathbf{w}$$

(阵簇向量构成特征空间, 特征值对应于信号在特征向量上投影的能量)

这种加权向量被称作离散椭球序列(DPSS: Discrete Prolate Spheroidal Sequence, 又被称为 Slepian 序列), 相应的天线方向图被称作 DPSS 函数。

➔ 时域应用: 已被用于设计 UWB 通信的脉冲波形!



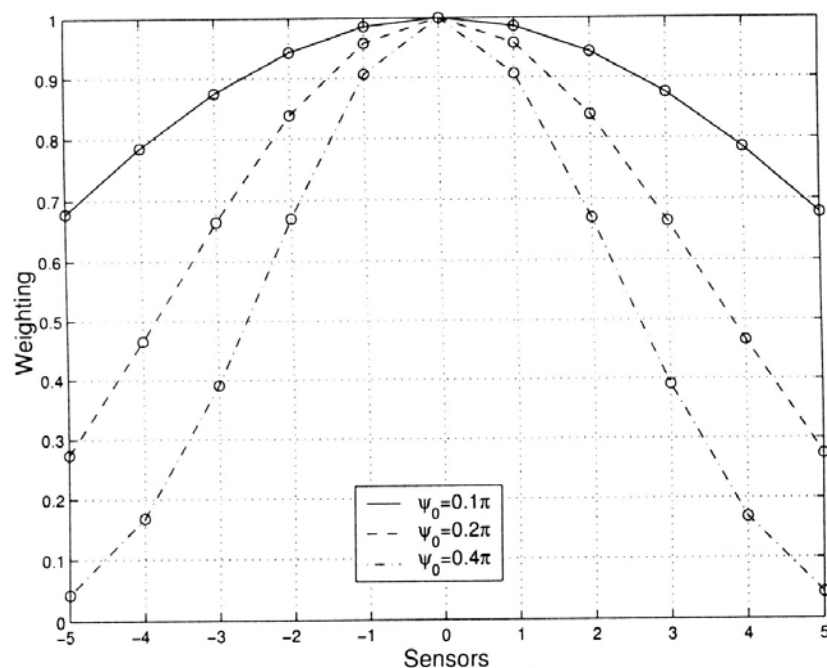


图 11(a) DPSS 序列

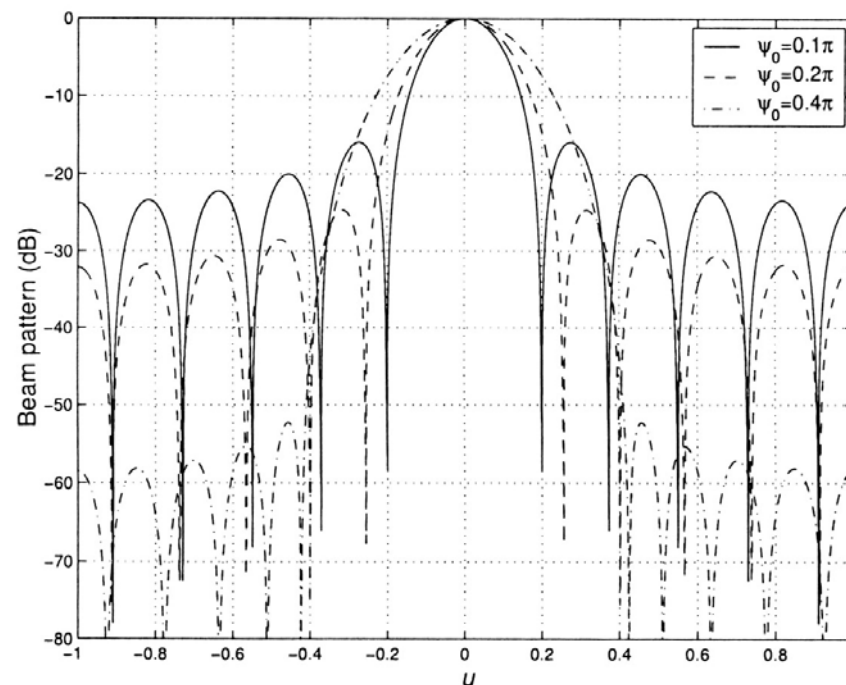


图 11(b) DPSS 天线方向图, $N=11$

四、指定旁瓣最小波束宽度

谱加权方法根据傅里叶变换的性质控制天线方向图的旁瓣，但并没有直接控制旁瓣的高度。对于均匀线阵，下面的方法可以直接控制旁瓣高度。



1. *Dolph—Chebychev* 加权

Dolph 根据 Chebychev 多项式的性质提出一种加权函数设计方法，在给定旁瓣电平时使波束宽度最小。

考虑一个均匀线阵，天线方向图的最大值指向阵列法向方向。假设期望的天线方向图是实对称函数，则加权函数也是实对称的。不失一般地，考虑阵列中的单元个数为奇数。定义：

$$a_m = w_n \Big|_{n=m-1+\frac{N}{2}}, \quad m = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2} \quad \text{且} \quad a_m = a_{-m}$$

则天线方向图为：

$$B(\psi) = a_0 + 2 \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} a_m \cos(m\psi)$$

进一步定义： $\alpha_n = \begin{cases} a_0 & , \quad n=0 \\ 2a_n & , \quad n=1, \dots, \frac{N-1}{2} \end{cases}$, for N odd , 则天线方向图为：

$$B(\psi) = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \alpha_k \cos\left(2k \frac{\psi}{2}\right)$$



下面，我们将看到天线方向图可以表示为阶次为 $N-1$ 的多项式。因为：

$$\exp(jm \frac{\psi}{2}) = \cos(m \frac{\psi}{2}) + j \sin(m \frac{\psi}{2}) = \left[\cos(\frac{\psi}{2}) + j \sin(\frac{\psi}{2}) \right]^m$$

将此 m 阶多项式进行二项式展开，并取其实部，即可得：

$$\begin{aligned} & \cos m \frac{\psi}{2} \\ &= \cos^m \frac{\psi}{2} - \frac{m(m-1)}{2!} \cos^{m-2} \frac{\psi}{2} \sin^2 \frac{\psi}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} \cos^{m-4} \frac{\psi}{2} \sin^4 \frac{\psi}{2} - \dots \end{aligned}$$

考虑 $\sin^2 \frac{\psi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\psi}{2}$ ，则对不同的 m 有：

$$m = 0, \cos m \frac{\psi}{2} = 1;$$

$$m = 1, \cos m \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\psi}{2};$$

$$m = 2, \cos m \frac{\psi}{2} = 2 \cos^2 \frac{\psi}{2} - 1;$$



$$m = 3, \cos m \frac{\psi}{2} = 4 \cos^3 \frac{\psi}{2} - 3 \cos \frac{\psi}{2};$$

定义: $x = \cos \frac{\psi}{2}$, 则上面的各式变为:

$$m = 0, \cos m \frac{\psi}{2} = 1 = T_0(x);$$

$$m = 1, \cos m \frac{\psi}{2} = x = T_1(x);$$

$$m = 2, \cos m \frac{\psi}{2} = 2x^2 - 1 = T_2(x);$$

$$m = 3, \cos m \frac{\psi}{2} = 4x^3 - 3x = T_3(x);$$

此即为前 4 阶 Chebychev 多项式, 其一般形式为:

$$T_m(x) = \cos m \frac{\psi}{2} \Big|_{\cos \frac{\psi}{2} = x} = \begin{cases} \cos(m \cos^{-1} x), & |x| \leq 1 \\ \cosh(m \cosh^{-1} x), & x > 1 \\ (-1)^m \cosh(m \cosh^{-1} x), & x < -1 \end{cases}$$



Chebyshev 多项式具有如下性质：

- 1) $T_m(x)$ 在 $|x| \leq 1$ 中有 m 个实根, 当 $\cos m \frac{\psi}{2} = 0$ 时、即 $m \frac{\psi}{2} = (2p-1) \frac{\pi}{2}$, $p = 1, \dots, m$ 时出现多项式的根:

$$x_p = \cos \left[(2p-1) \frac{\pi}{2m} \right], \quad p = 1, \dots, m$$

- 2) $T_m(x)$ 在 $|x| \leq 1$ 中有交替出现的最大值和最小值, 出现在以下位置:

$$x_k = \cos \left[\frac{k\pi}{m} \right], \quad k = 1, \dots, m-1$$

这些最大值和最小值的幅值均为 1, 即多项式在 $|x| \leq 1$ 区域中具有等幅震荡的特性。

- 3) 所有的多项式都通过 $(1,1)$ 点, 且 $|T_m(\pm 1)| = 1$ 。当 $x > 1$ 时, $|T_m(x)| > 1$ 。

由于天线方向图可以表示为阶次为 $N-1$ 的多项式, 我们可以令这个 $N-1$ 阶多项式的系数与 $N-1$ 阶 Chebyshev 多项式系数相等, 而后利用 Chebyshev 多项式的性质得到期望的天线方向图。



令主瓣的幅度等于 $T_m(x_0)$, $x_0 > 1$, 旁瓣的幅值为 1。

定义主瓣最大值与旁瓣幅值之比为 R :

$$R = \frac{\text{主瓣最大值}}{\text{旁瓣幅值}}$$

例如, 若 $R = 20$, 则旁瓣幅值比主瓣低 $20 \lg 20 = 26 \text{dB}$;

若 $R = 31.62$, 则旁瓣幅值比主瓣低 30dB 。

令 Chebychev 多项式 $T_{N-1}(x_0) = \cosh((N-1) \cosh^{-1} x_0) = R$, $|x_0| > 1$,

可根据指定的 R 得到主瓣最大值:

$$x_0 = \cosh\left(\frac{1}{N-1} \cosh^{-1} R\right)$$



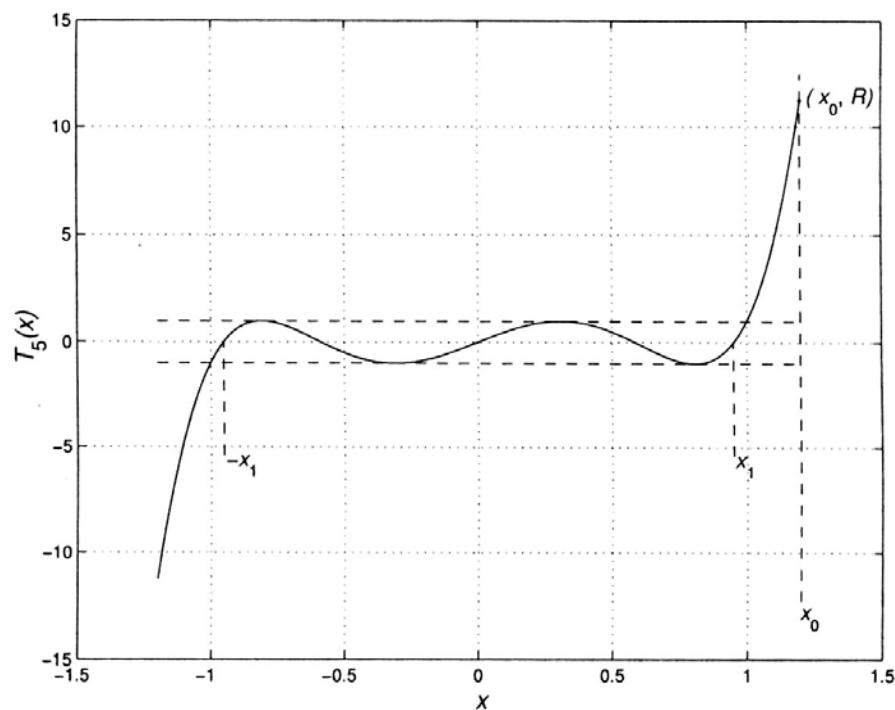


图 12(a) Chebyshev 多项式 $T_5(x)$

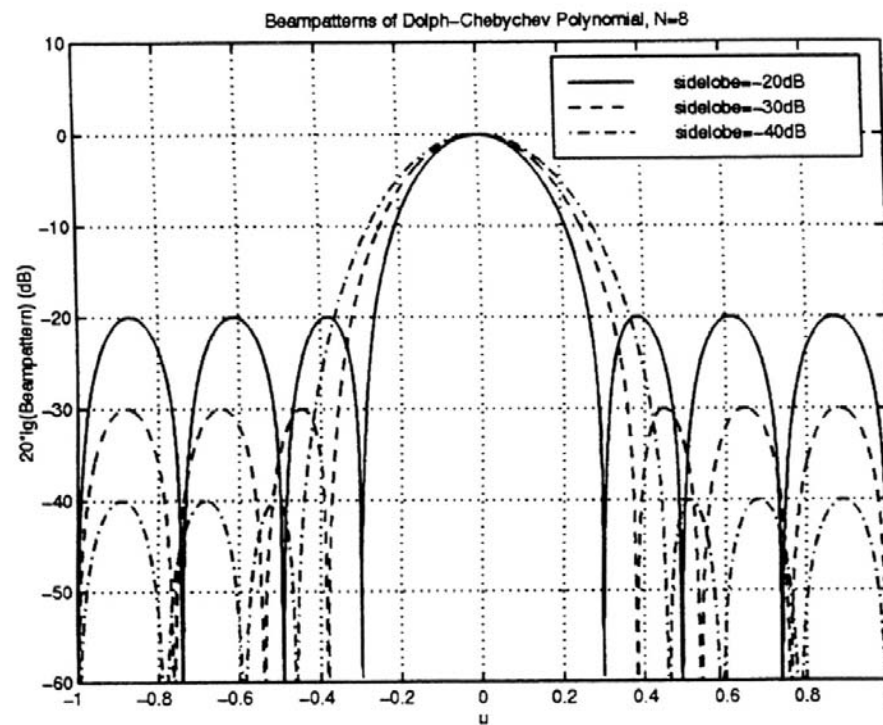


图 12(b) Dolph-Chebyshev 天线方向图, $N=8$

综上所述，利用 Chebyshev 多项式的性质实现 **Dolph—Chebyshev** 加权的设计步骤如下：

- 1) 对于有 N 个单元的均匀线阵，选择 $m = N - 1$ 阶的 Chebyshev 多项式。



- 2) 选择主瓣最大值与旁瓣幅值之比 R 。
- 3) 为了把角度域的可视区域 $(0, \pi)$ 映射到 x 域的 $(0, x_0)$, 定义一个新的坐标轴 $w = x / x_0$, 并令 $w = \cos \psi / 2$, 则 $x = x_0 \cos \psi / 2$ 。
- 4) 天线方向图为: $B(\psi) = \frac{1}{R} T_{N-1}(x_0 \cos(\frac{\psi}{2}))$, 除以 R 是为了使 $B(0) = 1$ 。
- 5) 根据期望天线方向图设计中的 Woodward 采样法, 寻找阵列加权以得到上面的天线方向图:

为了由上面得到的天线方向图进一步得到对 N 个天线单元的加权系数, 根据天线方向图与加权函数的关系 $B(\psi) = \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\psi)$, 对天线方向图进行采样得到 N 个采样值:

$$B(\psi_i) = \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(\psi_i), \quad i = 0, \dots, N-1$$

定义一个 $N \times N$ 维阵簇矩阵:

$$V(\psi) = [\mathbf{v}(\psi_0) \quad \cdots \quad \mathbf{v}(\psi_{N-1})]$$

和一个天线方向图矢量:



$$\mathbf{B} = [B(\psi_0) \quad \cdots \quad B(\psi_{N-1})]$$

则有：

$$\mathbf{B} = \mathbf{w}^H \cdot V(\psi) \quad \text{或} \quad \mathbf{B}^H = V^H(\psi) \cdot \mathbf{w}$$

因为阵簇矩阵 $V^H(\psi)$ 满秩，故可得权函数为：

$$\mathbf{w} = [V^H(\psi)]^{-1} \cdot \mathbf{B}^H$$

为进一步简化权函数计算，利用 **Chebyshev** 多项式的性质找到 *Dolph—Chebyshev* 天线方向图的零点：

$$x_p = \cos \left[(2p-1) \frac{\pi}{2(N-1)} \right], \quad p = 1, \cdots, N-1$$

即在 ψ 域 $N-1$ 个零点为：

$$\psi_p = 2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \left(\frac{(2p-1)\pi}{2(N-1)} \right) \right], \quad p = 1, \cdots, N-1$$

利用这 $N-1$ 个零点所对应的阵簇矢量构造一个 $N \times N$ 维阵簇矩阵：



$$V(\psi) = [\mathbf{v}(0) \quad \mathbf{v}(\psi_1) \quad \cdots \quad \mathbf{v}(\psi_{N-1})]$$

相应的天线方向图矢量为：

$$\mathbf{B} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

则要得到 *Dolph—Chebychev* 天线方向图加权函数为：

$$\mathbf{w} = [V^H(\psi)]^{-1} \cdot \mathbf{B}^H = [V^H(\psi)]^{-1} \cdot \mathbf{e}_1$$

Dolph 进一步根据多项式的性质证明了所得到的天线方向图主瓣宽度是最窄的，即可实现指定旁瓣条件下的最小波束宽度波束形成设计。

2. *Taylor* 分布

Dolph—Chebychev 加权得到的天线方向图是等旁瓣的。

为了抑制位于旁瓣的干扰，希望得到旁瓣衰减的天线方向图。



五、期望天线方向图设计

1. Woodward 采样法

这种方法基于频率波数响应与孔径加权函数之间的傅里叶变换关系：

$$\gamma(u) = \lambda \int_{-L}^L w^*(z_\lambda) e^{j2\pi uz_\lambda} dz_\lambda \longleftrightarrow w^*(z_\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(u) e^{-j2\pi uz_\lambda} du; \quad z_\lambda = z / \lambda$$

对于线性孔径，由于 z_λ 在 $\pm L/2\lambda$ 范围内，故可以在波数空间内以采样间隔 $\Delta u_s = \lambda / L$ 对孔径函数进行采样。例如，若期望的天线方向图 $B_d(u)$ 为矩形，则以 Δu_s 进行采样可以得到一系列采样值： $B_d(u_m)$ ，其中 $u_m = m\Delta u_s$ ， $m = 0, \dots, N_s - 1$ ， $N_s = \text{int}[2L / \lambda]$ 。

利用移位 sinc 函数之和，即可以重构期望的天线方向图：

$$B(u) = \sum_{m=0}^{N_s-1} B_d(u_m) \text{sinc}\left(\frac{\pi L}{\lambda}(u - u_m)\right)$$

对于线性阵列，令 $Nd = L$ ，在 u 空间内的采样间隔为 $2 / N$ ，以 $u = 0$ 为中心对期望的天线方向图进行



采样, 可以得到一系列采样值: $B_d(u_m)$, 其中 $u_m = \frac{2}{N} \left(m - \frac{N-1}{2} \right)$, $m = 0, \dots, N-1$ 。

可以重构期望的天线方向图:

$$\begin{aligned}
 B(u) &= \sum_{m=0}^{N-1} B_d(u_m) \frac{\sin \left[\frac{N}{2} \pi (u - u_m) \right]}{\sin \left[\frac{\pi}{2} (u - u_m) \right]} \\
 &= \sum_{m=0}^{N-1} B_d(u_m) \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(k - \frac{N-1}{2})\pi(u - u_m)} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(k - \frac{N-1}{2})\pi u} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} B_d(u_m) e^{j(k - \frac{N-1}{2})\pi u_m} \right)
 \end{aligned}$$

根据频率波数响应(天线方向图)与加权函数之间的傅里叶变换关系:

$$B(u) = \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(u) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(k - \frac{N-1}{2})\pi u} \cdot \mathbf{w}_n^*$$

可知上式括号中部分即为期望天线方向图所对应的权函数:



$$w_n^* = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} B_d(u_m) e^{j(k - \frac{N-1}{2})\pi u_m}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

将上述加权系数表示为矢量，有：

$$\mathbf{w} = [V^H(\psi)]^{-1} \cdot \mathbf{B}^H$$

其中 $V(\psi) = [\mathbf{v}(\psi_0) \ \cdots \ \mathbf{v}(\psi_{N-1})]$ 为 $N \times N$ 维阵簇矩阵； $\mathbf{B} = [B_d(\psi_0) \ \cdots \ B_d(\psi_{N-1})]$ 为期望的天线方向图采样所构成的矢量。

2. 最小平方误差法

设期望的天线方向图为 $B_d(\psi)$ 。定义平方误差为：

$$\xi = \int_{-\pi}^{\pi} |B_d(\psi) - \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\psi)|^2 d\psi$$

$$\text{令：} \quad \frac{\nabla \xi}{\nabla \mathbf{w}^H} = 0,$$

$$\text{有：} \quad -\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}(\psi) B_d^*(\psi) d\psi - \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}(\psi) \mathbf{v}^H(\psi) d\psi \right\} \mathbf{w}_o = \mathbf{0}$$



则为了达到期望天线方向图 $B_d(\psi)$ 的最小平方差逼近, 最优的加权系数矢量为:

$$\mathbf{w}_o = A^{-1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}(\psi) B_d^*(\psi) d\psi, \quad \text{其中 } A = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}(\psi) \cdot \mathbf{v}^H(\psi) d\psi$$

特例: 对于均匀线阵, 阵簇矢量为

$$\mathbf{v}(\psi) = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{N-1}{2}\psi} & e^{-j(\frac{N-1}{2}-1)\psi} & \dots & e^{j\frac{N-1}{2}\psi} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} e^{j(n-\frac{N-1}{2})\psi} \end{bmatrix}_{n=0, \dots, N-1}$$

$$\text{则 } [A]_{nk} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\left[j(n-\frac{N-1}{2}) - j(k-\frac{N-1}{2})\right]\psi} d\psi = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-k)\psi} d\psi = 2\pi\delta_{nk}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{w}_o]_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-\frac{N-1}{2})\psi} B_d^*(\psi) d\psi$$

对于 $B_d(\psi)$ 为实对称方向图的特殊情况, 不失一般地, 设 N 为奇数, 则:

$$\hat{B}_d(\psi) = \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} a_{mo} e^{jm\psi}; \quad a_{mo} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_d(\psi) e^{-jm\psi} d\psi \quad \text{为 } B_d(\psi) \text{ 的复里叶级数};$$



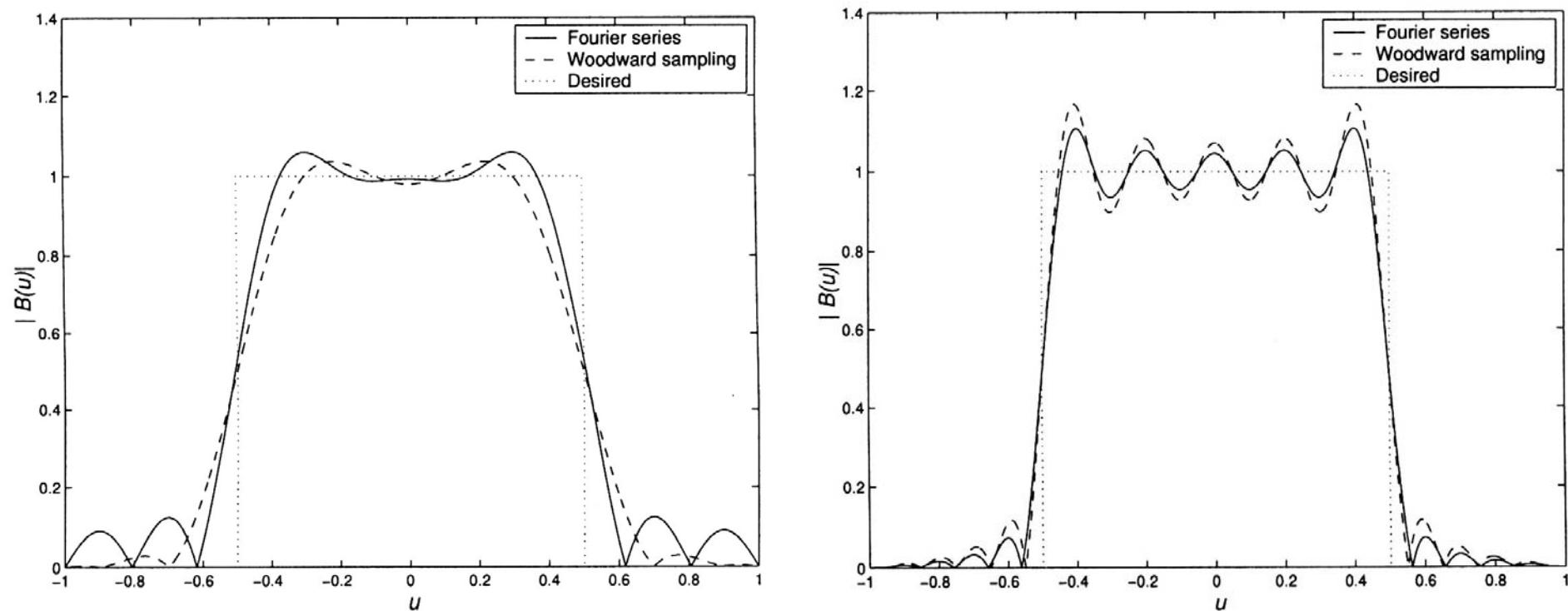


图 13 线阵的期望和合成天线方向图(傅里叶级数法和 Woodward 采样法), (a) $N=10$; (b) $N=20$

. 注: 本方法无需对期望天线方向图进行采样



六、特殊天线方向图设计——形成零陷

对于任意阵列，要在给定的波数 \mathbf{k}_J 上形成零陷，需要：

$$B(\mathbf{k}_J) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_J) = 0,$$

其中： $\mathbf{v}(\mathbf{k}_J) = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}_J^T \mathbf{p}_0} & \dots & e^{-j\mathbf{k}_J^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix}^T$ 为干扰所对应的阵簇矢量。

实际上，上述零陷被称为**零阶限制**——零阶零陷。更一般地，考虑若干零阶限制：

$$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, M_0$$

则可定义一个 $N \times M_0$ 维限制矩阵：

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{k}_1) & \vdots & \mathbf{v}(\mathbf{k}_2) & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{v}(\mathbf{k}_{M_0}) \end{bmatrix}$$

第二类限制是天线方向图对波数的一阶导数进行限制。对于线阵，波数的一阶导数为：

$$\left. \frac{dB(k)}{dk} \right|_{k=k_i} = \mathbf{w}^H \left[\left. \frac{d\mathbf{v}(k)}{dk} \right|_{k=k_i} \right] = \mathbf{w}^H \mathbf{d}_1(k) \Big|_{k=k_i}, \quad i \in \Omega_1$$

一阶零陷限制为： $B(\mathbf{k}_J) = \mathbf{w}^H \mathbf{d}_1(\mathbf{k}_J) = 0$



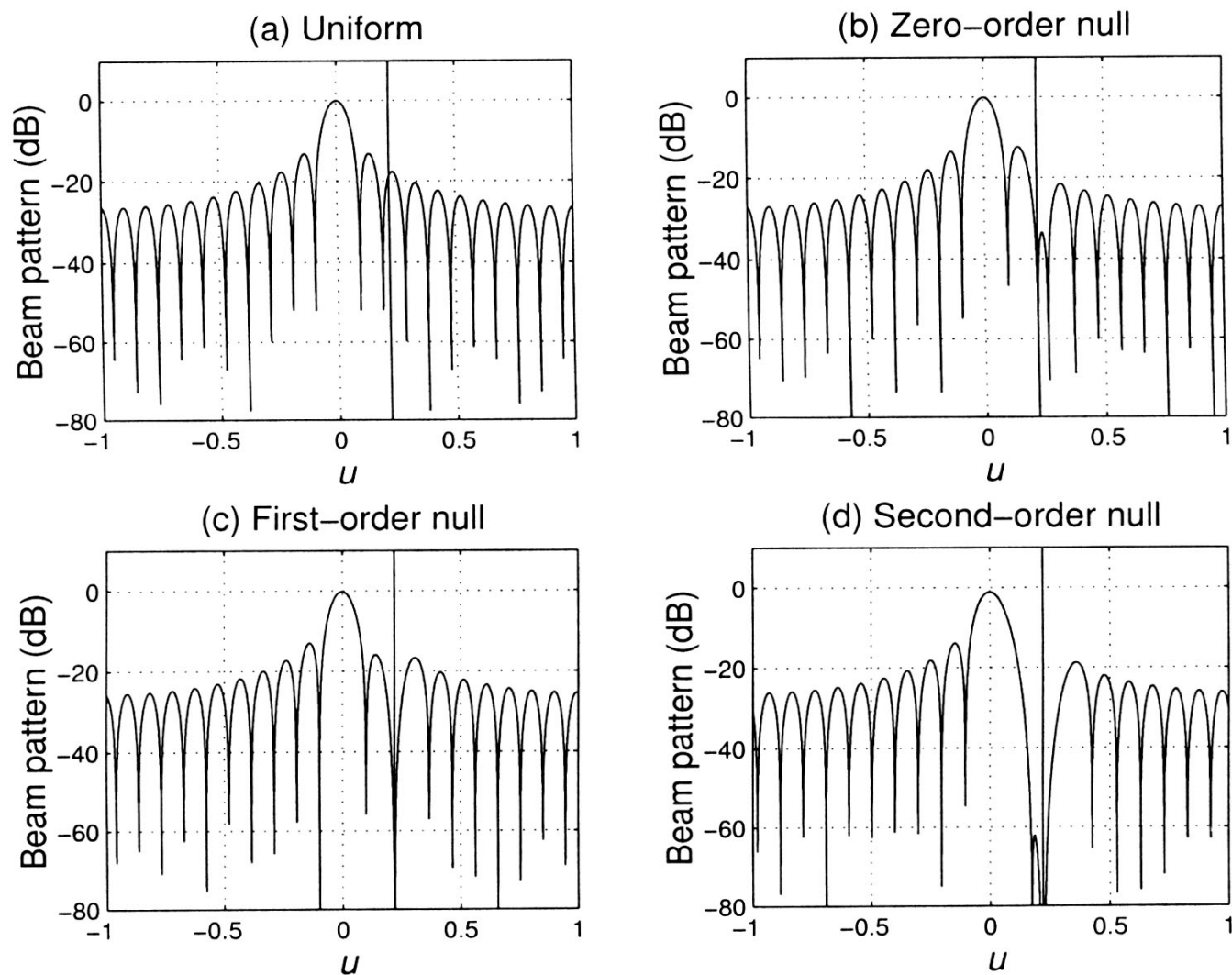


图 14 0、1、2 阶零陷限制的天线方向图



假设有 M_1 个一阶零陷限制，则可定义一个 $N \times M_1$ 维限制矩阵：

$$\mathbf{C}_1 = [\mathbf{d}(\mathbf{k}_1) \quad \vdots \quad \mathbf{d}(\mathbf{k}_2) \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \mathbf{d}(\mathbf{k}_{M_1})]$$

考虑了各类限制的总限制矩阵为：

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_0 \quad \vdots \quad \mathbf{C}_1]$$

✚ 上述限制下的最小平方误差天线方向图合成

假设面向期望信号设计的天线方向图可以合成为：

$$B_d(\mathbf{k}) = \mathbf{w}_d^H \mathbf{v}(\mathbf{k})$$

为了在此基础上对干扰信号形成零陷，利用另一个加了一组限制的方向图 $B(\mathbf{k}) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k})$ 去逼近期望信号的天线方向图，使期望信号的天线方向图与受限制的天线方向图之间的平方误差 $\varepsilon = \iint |B_d(\mathbf{k}) - B(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \|\mathbf{w}_d - \mathbf{w}\|^2$ 最小：

$$\min_{\mathbf{w}} \iint |B_d(\mathbf{k}) - B(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \|\mathbf{w}_d - \mathbf{w}\|^2, \quad st. \quad \mathbf{w}^H \mathbf{C} = \mathbf{0}$$



利用拉格朗日乘子方法求解这个优化问题，即使：

$$\left[\mathbf{w}_d^H - \mathbf{w}^H \right] \left[\mathbf{w}_d - \mathbf{w} \right] + \mathbf{w}^H \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^H \mathbf{C}^H \mathbf{w}$$

最小，可得最优权函数为：

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_o^H &= \mathbf{w}_d^H \left(I_N - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H \right) \\ &= \mathbf{w}_d^H (I_N - P_C) = \mathbf{w}_d^H P_C^\perp = \mathbf{w}_d^H - \mathbf{a} \mathbf{C}^H \end{aligned}$$

其中 $P_C = \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$ 为投影到限制空间的投影矩阵， $P_C^\perp = I - \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^H$ 为与其正交的矩阵。

可见，最优加权向量是期望权矢量减去限制矢量的加权和。相应的天线方向图为：

$$\begin{aligned} B_o(u) \\ = \left(\mathbf{w}_d^H - \mathbf{a} \mathbf{C}^H \right) \mathbf{v}(u) = B_d(u) - \mathbf{a} \mathbf{C}^H \mathbf{v}(u) \end{aligned}$$

以一个零阶限制的情况为例：

$$\mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}_1) = 0$$



则经上述最优加权后得到的天线方向图为：

$$\begin{aligned}
 B_o(u) &= \left(\mathbf{w}_d^H - \mathbf{w}_d^H \mathbf{v}(u_1) \left(\mathbf{v}^H(u_1) \mathbf{v}(u_1) \right)^{-1} \mathbf{v}^H(u_1) \right) \mathbf{v}(u) \\
 &= B_d(u) - B_d(u_1) \mathbf{v}^H(u_1) \mathbf{v}(u)
 \end{aligned}$$

对于零阶限制，上述天线方向图的第二项是指向干扰方向的传统天线方向之和，故天线方向图可进一步表示为：

$$B_o(u) = B_d(u) - \sum_{m=1}^{M_0} a_m B_c(u - u_m), \text{ 其中 } M_0 \text{ 为零阶零陷限制的个数, } u_m \text{ 为这些零陷的位置。}$$

可见，上述最优（在最小平方误差意义上）处理器的天线方向图就是期望的天线方向图 $B_d(\mathbf{k})$ 减去指向若干零陷位置的若干传统天线方向图的加权和 —— **旁瓣对消器** 原理。

以上结论同样适用于高阶零陷。



§1.6 窄带与宽带阵

在前面各节的推导中，能够得到天线方向图是因为信号可以相干叠加。这种相干叠加针对的是窄带信号。实际的系统往往有一定的带宽，当此带宽宽到无法保证上述信号相干叠加条件时，即被称为宽带信号。阵列天线所定义的窄带条件，实际上是衡量信号相干性的一个条件。

信号的相干性可以描述为信号的不变可加性，即信号相加前后波形或频谱结构不变。**相加前后谱结构不变，则认为信号是相干的。**

信号相干性的概念在天线及波动领域应用得很广泛，主要表现在同一信源经过不同信道作用于一点时信号的叠加效应，比如同一信源经多径传播相干叠加导致多径衰落；同一信源经过天线阵形成波束等等。

● **信号的相干性与相关性**：是两个不同的概念。比如两个窄带信号：

$$s_1(t) = \cos \omega t; \quad s_2(t) = \sin \omega t$$

$s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 是不相关的，因为它们在时间上是正交的，内积为零。但是 $s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 是相干的，因为

$$s_1(t) + s_2(t) = \cos \omega t + \sin \omega t = \sqrt{2} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \rightarrow \text{仍然为同一频率的正弦波，仅幅度和相位有变化。}$$



● 信号的相干条件:

不难证明, 当 $s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 为任意同频单频信号时, 它们相加后都没有频谱的畸变, 因而任意的单频信号都是强相干信号。

但是, 对于有一定带宽的信号而言, 两个谱结构相同的信号 (可以是同一信源经过两个通道后的两路信号) 相加后, 谱结构就可能会发生畸变。

例如, 考虑如下两个信号:

$$s_1(t) = x(t)e^{j\omega_0 t}, \quad s_2(t) = s_1(t - \tau) = x(t - \tau)e^{j\omega_0(t - \tau)}$$

其中 $x(t)$ 为带限信号, 其频谱为 $X(\omega)$ 。

则这两个信号的频谱以及两个信号之和分别为:

$$S_1(\omega) = X(\omega - \omega_0), \quad S_2(\omega) = X(\omega - \omega_0)e^{-j\omega\tau}$$

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_1(t) + s_1(t - \tau) = x(t)e^{j\omega_0 t} + x(t - \tau)e^{j\omega_0(t - \tau)} \quad (*)$$

虽然 $X(\omega)$ 、 $S_1(\omega)$ 、 $S_2(\omega)$ 具有相同的谱结构, 但两个信号相加后频谱为:

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) = X(\omega - \omega_0)[1 + e^{-j\omega\tau}] \quad (**)$$



令 $T(\omega) = 1 + e^{-j\omega\tau} \rightarrow$ 阵列的时间滤波特性

则 $S(\omega) = X(\omega - \omega_0)T(\omega)$

$T(\omega)$ 的幅频特性和相频特性如图所示。可以看出，当 τ 为常数时，随着频率的变化， $T(\omega)$ 对 $X(\omega - \omega_0)$ 的增益也在变化，即 $s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 相加后信号频谱结构将发生畸变。

当 $x(t)$ 的带宽 B 相对于 $1/\tau$ 非常小时，即 $B \ll 1/\tau$ 时， $X(\omega - \omega_0)$ 的频谱集中在 ω_0 左右很小的一段区域内，在此狭窄的区域内可以近似认为 $T(\omega)$ 是平坦的， $X(\omega - \omega_0)$ 经过 $T(\omega)$ 后频谱结构

的畸变可以忽略，所以可以认为信号 $s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 具有较强的相干性。可见，信号相干性与信号带宽有密切的联系。

若 $x(t)$ 满足上述条件，在 ω_0 附近认为 $T(\omega)$ 是平坦的，则可以用 ω_0 代替 $T(\omega)$ 中的 ω 代入式 (**)，得：

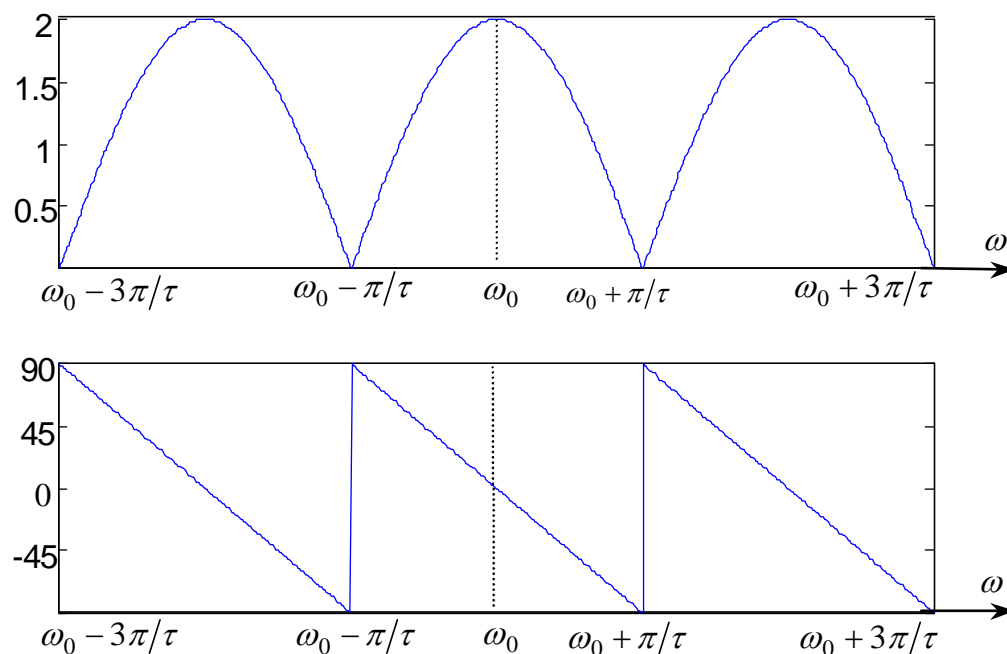


图 15 $T(\omega)$ 的幅频特性(上图)和相频特性(下图)



$$S(\omega) = X(\omega - \omega_0)[1 + e^{-j\omega_0\tau}] = X(\omega - \omega_0) + X(\omega - \omega_0)e^{-j\omega_0\tau} \quad (\text{Remind: } T(\omega) = 1 + e^{-j\omega\tau})$$

这种窄带条件反映在时域上，有：

$$s(t) = x(t)e^{j\omega_0 t} + x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega_0\tau} = x(t)e^{j\omega_0 t} + x(t)e^{j\omega_0(t-\tau)} \quad (***)$$

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_1(t) + s_1(t-\tau) = x(t)e^{j\omega_0 t} + x(t-\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)} \quad (*)$$

比较式(***)与式(*)可见，式(***)忽略了 τ 对 $s_2(t)$ 的包络 $x(t-\tau)$ 的影响。即对于窄带阵，传播时延变成了相移。

以上讨论提出了相干条件。带限信号 $x(t)$ 的带宽 B 与延时 τ 满足如下关系时，阵列为窄带阵：

$$B \ll 1/\tau \quad \text{或} \quad B\tau \ll 1$$

定义相干指数： $\rho = B\tau$ ，并把 $\rho \ll 1$ 叫做窄带标准。

电磁波在空间中传播需要时间，因此空间的跨度可能造成信号的相对时延。尺寸为 L 的天线（或天线阵）可能造成的信号时延的最大值为： $\tau_{\max} = L/c$ ，其中 c 为电磁波传播速度。

则相干指数最大为：

$$\rho_{\max} = B\tau_{\max} = BL/c$$



对于 N 元线阵，若阵元间距 d 为载波波长 λ 的一半，载波频率为 f_c ，则天线尺寸为：

$$L = (N-1) \cdot d = (N-1) \cdot \lambda / 2$$

最大相干指数为：

$$\rho_{\max} = LB / c = (N-1)\lambda B / (2\lambda f_c) = (N-1)B / (2f_c)$$

● 用窄带阵接收宽带信号会如何？

调整二元阵的复加权，可以修改整个阵方向图使其零陷置于不需要的干扰信号方向。只要干扰信号是窄带的(在 § 1.2 中信号可用单一频率 ω_0 表示)，所得方向图便能成功地抑制不需要的干扰信号。

根据 § 1.4 的分析，均匀加权均匀线阵的零点波束宽度近似为：

$$\theta_{NN} = \arcsin\left(\frac{2\lambda}{Nd}\right) \text{——零点波束宽度（或者进一步说——零陷位置）与信号波长有关。}$$

当干扰信号不能用单一频率表征、其频率分量覆盖一定频谱时，适应于频率 ω_1 的复权将不适合频率 ω_2 ，因为 λ_0 变化时阵方向图零陷漂移。

实例：MIMO-OFDM



● 宽带阵列处理

若要在所有要用的频率上保持零陷在同一方向上，则频率不同复权亦应不同！

→ 在有用频带若干频率点上设计不同幅度和相位的权系数，即可将接收信号进行复利叶变换，在频域对不同的频率点分别加权。

由 § 1.3 的分析可知，传感器阵列接收的时空序列频谱为 $\mathbf{X}(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})$ ，其中阵簇矢量 $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ 包括了阵列的所有空间特性。

若 $x(t)$ 为窄带信号，则阵列输出响应的频域形式为： $Y(\omega) = \mathbf{W}^H(\omega) \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot X(\omega)$ 。

对于传统的波束形成器， $\mathbf{W}^H(\omega) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_d)$ 与频率无关，阵列加权函数变成了复数加权，

$$Y(\omega) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_d) \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot X(\omega) \rightarrow \text{Max}\{Y(\omega)\} = X(\omega)。$$

若 $x(t)$ 非窄带信号，则 $Y(\omega) = T(\omega) \cdot X(\omega)$ —— 即直接通过对阵列接收信号复加权（即只进行空域匹配滤波）不能进行相干叠加恢复信号，需要对每个阵元接收信号进行时域滤波，实现时空匹配，才能完成相干叠加。



频域相乘 → 时域卷积 → 可用一个用抽头延迟线实现的横向滤波器实现复加权，即**宽带阵处理**。

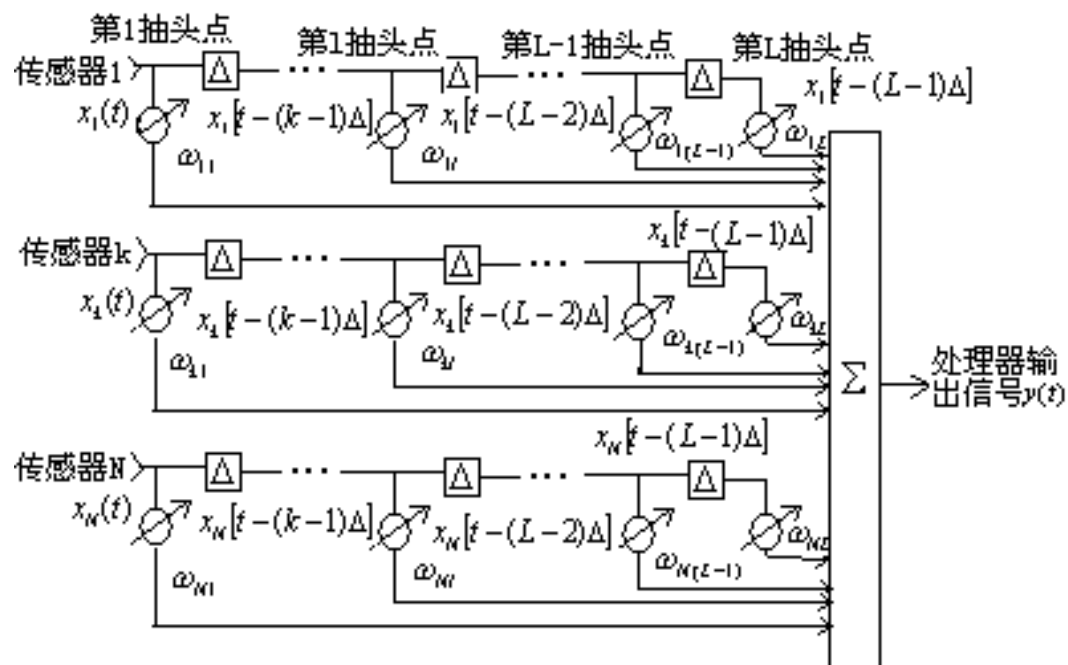
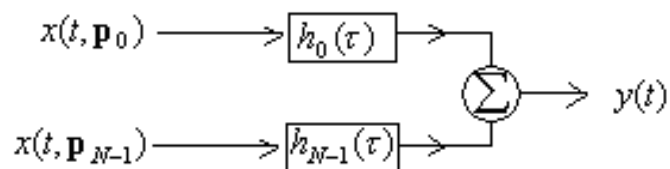


图 16 宽带波束形成处理器



考虑上图所示的抽头延迟线多通道处理器。多通道宽带信号处理器由 N 个传感器通道组成，每一条通道是具有 L 个抽头点的抽头延迟线，有 $L-1$ 个时间延迟，每个时延 Δ 秒。

定义第一抽头点 N 个传感器的接收信号矢量为：

$$\mathbf{x}'_1(t) = \mathbf{x}'(t) = [x_1(t) \cdots x_N(t)]^T$$

出现在 N 个通道第二抽头点的信号是出现于第一抽头点的信号延迟了 Δ 秒后的结果，即：

$$\mathbf{x}'_2(t) = \mathbf{x}'(t - \Delta) = [x_1(t - \Delta) \cdots x_N(t - \Delta)]^T$$

因此，可以得到整个多通道处理器的总信号矢量为：

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1(t) \\ \mathbf{x}'_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}'(t - \Delta) \\ \vdots \\ \mathbf{x}'(t - (L-1)\Delta) \end{bmatrix}$$

可见接收信号矢量 $\mathbf{x}(t)$ 包含 L 个分矢量，每个分矢量都是 N 维。



定义第一抽头点 N 个传感器的加权矢量为: $\mathbf{w}_1' = [w_{11} \quad \cdots \quad w_{N1}]^T$

则整个多通道处理器的 $N \times L$ 维总权矢量为: $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{w}_L' \end{bmatrix}$

多通道抽头延迟线处理器的输出为:

$$y(t) = \sum_{l=1}^L (\mathbf{w}_l')^T x_l'(t) = \sum_{l=1}^L (\mathbf{w}_l')^T x(t - (l-1)\Delta) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(t)$$

§1.7 波束域波束形成

在前面的所有处理中, 我们对到达阵列中每个单元的信号进行加权处理得到输出, 这种处理被称为单元域波束形成。

我们也可以先用这些单元构成一组波束, 而后把这些波束作为单元对到达波束的信号进行加权, 这就是波束域波束形成。



例如，我们可以对 N 单元均匀线阵进行加权，从而产生 N 个正交的波束，中心的波束为指向阵列法向的传统波束。形成中心波束的加权向量为：

$$\mathbf{w}^H(0) = \frac{1}{N} \mathbf{1}^T$$

其他波束指向 u 域中阵列法向两侧间隔 $2/N$ 的位置，即第 m 个波束指向 $2m/N$ 。

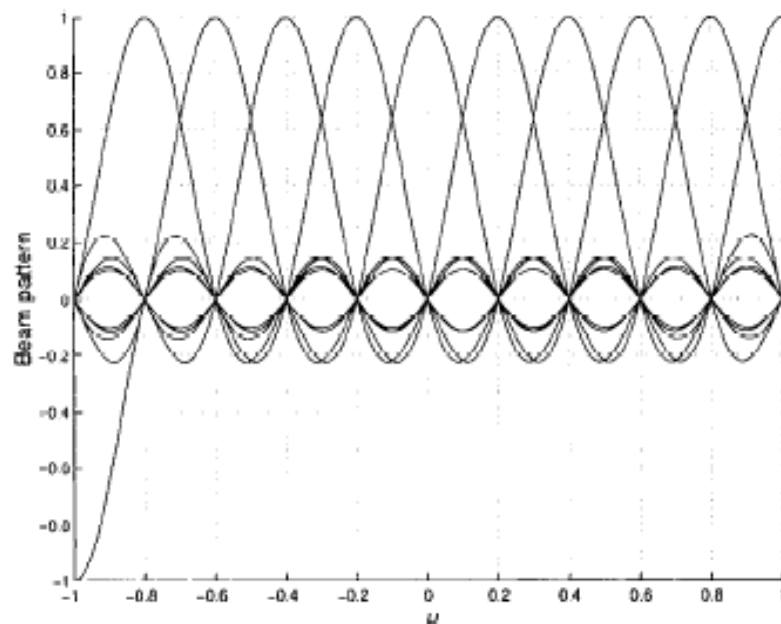


图 17 N 个 u 域天线方向图, $N=10$



此时 N 个权矢量是正交的： $\mathbf{w}^H(m)\mathbf{w}(l) = \frac{1}{N}\delta_{ml}$ ，相应的波束也是正交的：

$$B_m(u) = \mathbf{w}^H(m)\mathbf{v}(u)$$

$$\int_{-1}^1 B_m(u)B_l^*(u)du = \mathbf{w}^H(m)\left(\int_{-1}^1 \mathbf{v}(u)\mathbf{v}^H(u)du\right)\mathbf{w}(m) = \mathbf{w}^H(m) \cdot I \cdot \mathbf{w}(m) = \frac{1}{N}\delta_{ml}$$

构成一个 $N \times N$ 维矩阵 \mathbf{B}_{bs}^H ，其第 m 行为 $\mathbf{w}^H(m)$ ，那么经过这个矩阵后在 N 个单元上接收的信号 \mathbf{x} 变换为： $\mathbf{x}_{bs} = \mathbf{B}_{bs}^H \mathbf{x}$ ，即为 N 个波束上接收的信号。

上述矩阵 \mathbf{B}_{bs}^H 一般被称为 Butler 矩阵，实际上是 DFT 矩阵，是可逆的。因此通过上述变换并没有丢失任何信息。因为：

$$\mathbf{X}(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbf{v}(\psi),$$

$$\mathbf{X}_{bs}(\omega) = \mathbf{B}_{bs}^H \mathbf{X}(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbf{B}_{bs}^H \mathbf{v}(\psi);$$

故经过上述变换，单元域阵簇矢量变换为波束域阵簇矢量：



$$\mathbf{v}_{bs}(\psi) = \mathbf{B}_{bs}^H \mathbf{v}(\psi)。$$

对波束域矩阵的输出 \mathbf{x}_{bs} 进行加权 \mathbf{w}_{bs}^H ，可以得到标量输出。

相应的波束域波束形成的天线方向图为：

$$B(\psi) = \mathbf{w}_{bs}^H \mathbf{v}_{bs}(\psi)$$

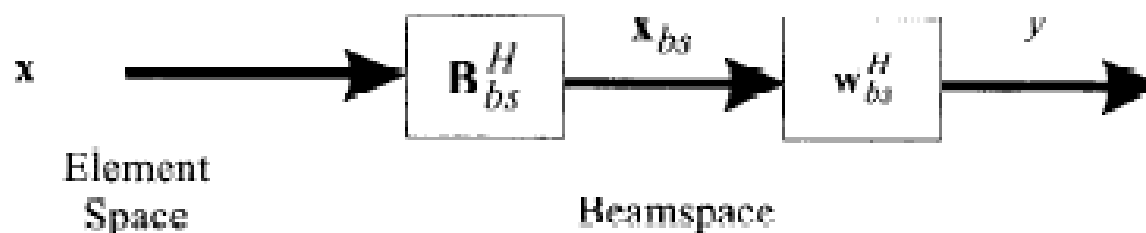


图 18 Butler 波束形成器

上述波束域矩阵 \mathbf{B}_{bs}^H 也可以是 $N_{bs} \times N$, $N_{bs} < N$ 维的，即为降维变换，从而降低波束域处理的复杂度。如图 18 中， \mathbf{x} 为 N 维向量，而 \mathbf{x}_{bs} 为 N_{bs} 维。



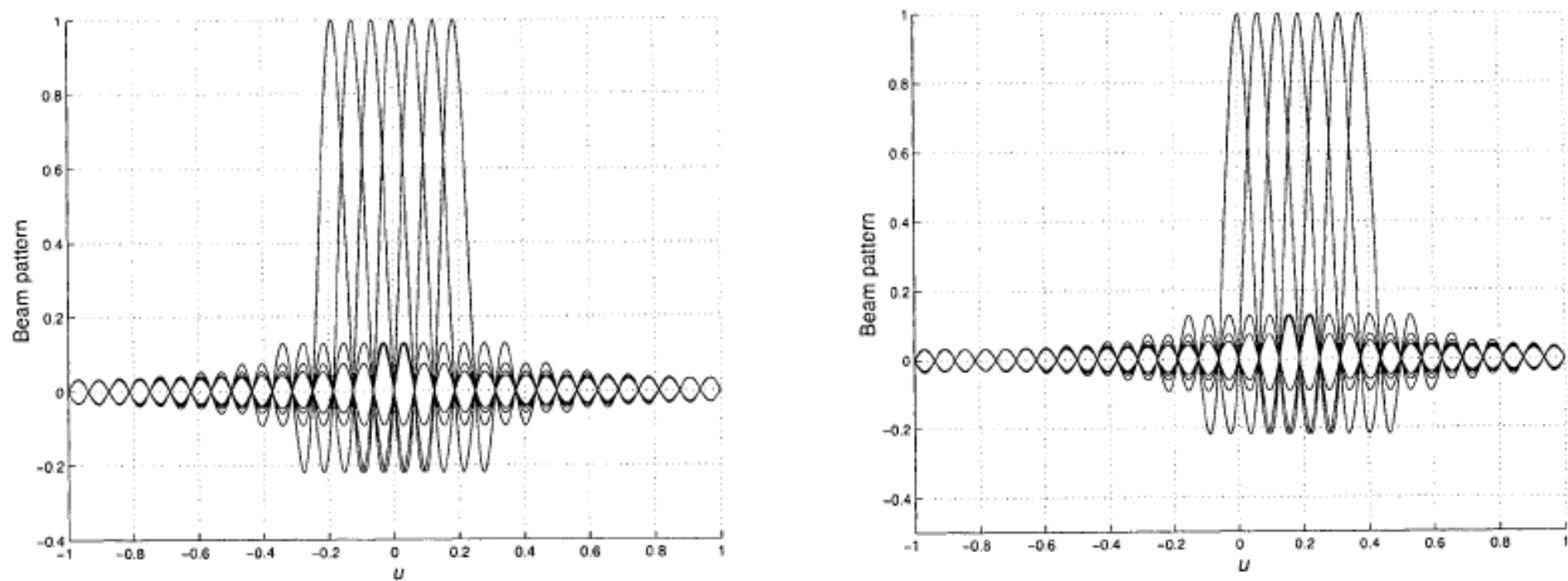
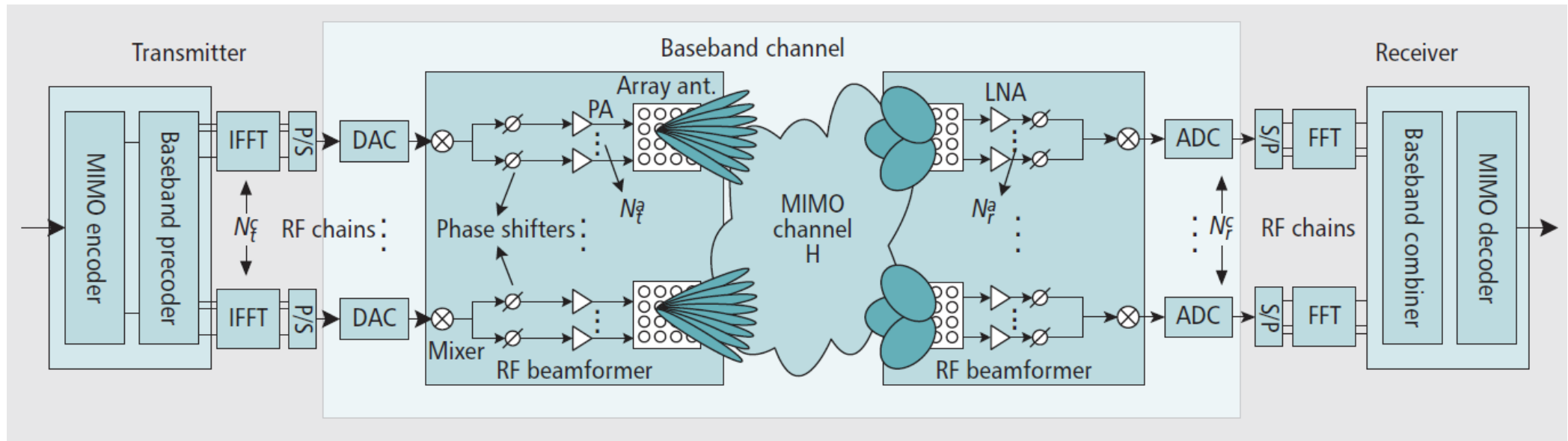


图 18 降维波束域波束形成器, $N=32$, $N_{bs}=7$, 左图: $u=0$; 右图: $u=6/N$

举例：

Massive MIMO/毫米波 Massive MIMO → 模拟-数字混合波束形成方框图



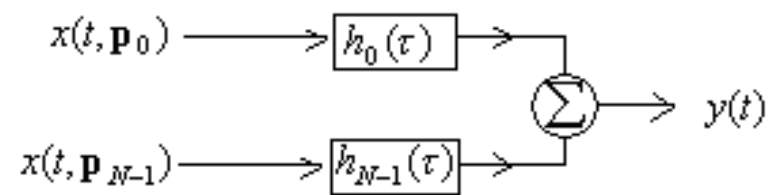
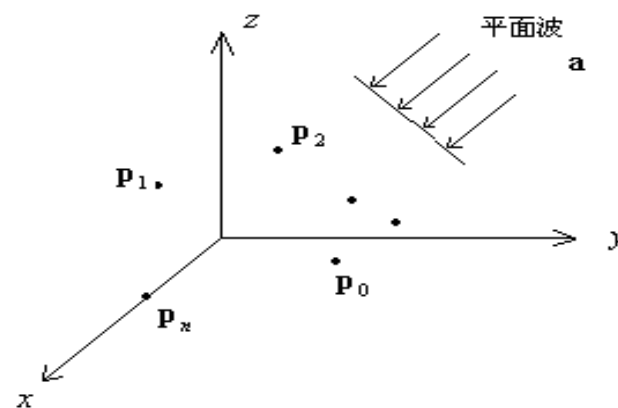
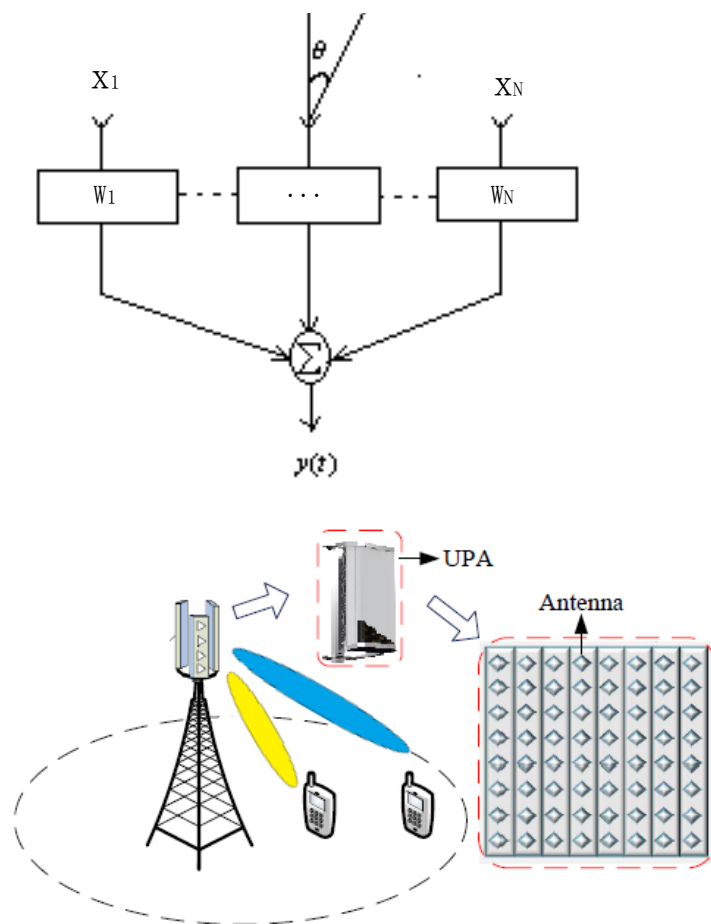


W. Roh, J. Seol, J. Park, B. Lee, J. Lee, Y. Kim, J. Cho, K. Cheun, and F. Aryanfar, “**Millimeter-Wave Beamforming as an Enabling Technology for 5G Cellular Communications: Theoretical Feasibility and Prototype Results**”,
 IEEE Communications Magazine • February 2014



§1.8 小 结

◆ 时空滤波器



考虑上图所示的传感器阵，由 N 个分别位于 $\mathbf{p}_n = [p_{x_n} \quad p_{y_n} \quad p_{z_n}]^T$ 的各向同性传感器组成。

在不同时刻 t 各传感器接收的信号构成了时空序列：

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(t, \mathbf{p}_0) \\ \vdots \\ x(t, \mathbf{p}_{N-1}) \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{Fourier Transform}} \mathbf{X}(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k})$$

对每个传感器用一个线性时不变滤波器 $h_n(\tau)$ 进行处理，并将其输出求和得到阵列输出 $y(t)$ ：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^T(t - \tau) \mathbf{x}(\tau, \mathbf{p}) d\tau \xleftrightarrow{\text{Fourier Transform}} Y(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot X(\omega)$$

$$\text{其中 } \mathbf{h}(\tau) = \begin{bmatrix} h_0(\tau) \\ \vdots \\ h_{N-1}(\tau) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(t - \tau_0) \\ \vdots \\ x(t - \tau_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad \text{传播时延 } \tau_n = \frac{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{p}_n}{c}, \quad \omega \tau_n = \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{p}_n, \quad \text{波数 } \mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a}$$

$$= -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \cdot \mathbf{i}_x \\ \sin \theta \sin \phi \cdot \mathbf{i}_{yx} \\ \cos \theta \cdot \mathbf{i}_z \end{bmatrix} = -\frac{2\pi}{\lambda} \begin{bmatrix} u_x \cdot \mathbf{i}_x \\ u_y \cdot \mathbf{i}_y \\ u_z \cdot \mathbf{i}_z \end{bmatrix}。$$



$$\text{阵簇矢量或阵列流形 } \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_0} \\ \vdots \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_0} \\ \vdots \\ e^{-j\omega\tau_{N-1}} \end{bmatrix} \text{反映了传感器阵列的所有空间信息。}$$

对单位平面波信号，阵列的输出响应：

$$Y(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{v}(\mathbf{k}) \stackrel{\Delta}{=} \gamma(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{W}^H(\omega) \mathbf{v}(\mathbf{k})$$

决定了阵列的时空处理特性。

$\gamma(\omega, \mathbf{k})$ 为阵列的频率波数响应函数，它描述了传感器阵对频率为 ω 、波数为 \mathbf{k} 的输入平面波信号的复增益，可视为一个线性时不变系统——时空滤波器的传递函数。

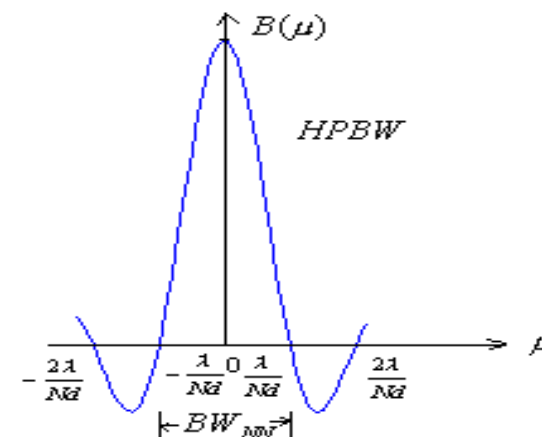
天线方向图是在可见区域内上述 $\gamma(\omega, \mathbf{k})$ 随平面波信号入射角度变化的函数：

$$B(\omega, \theta, \phi) = \gamma(\omega, \mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a}(\theta, \phi)}$$



天线方向图的性能指标

- 分辨率 ——→ 半功率波束宽度、零点波束宽度
- 信号增强能力 ——→ 阵列增益
- 干扰抑制能力 ——→ 旁瓣特性：旁瓣电平、旁瓣衰减率、零陷位置
- 角域覆盖 ——→ 栅瓣特性：栅瓣位置



特例：均匀加权均匀线阵天线方向图的性能：

■ 三分贝波束宽度近似为：

$$\theta_{3dB} = \arcsin(0.866 \frac{\lambda}{Nd});$$

可见，频率越高，波束越窄；孔径越大，波束越窄。



■ 最大值指向 θ_d 时的三分贝波束宽度为：

$$\theta_{3dB} = \arccos\left[\cos \theta_d + 0.443 \frac{\lambda}{Nd}\right] - \arccos\left[\cos \theta_d - 0.443 \frac{\lambda}{Nd}\right];$$

可见，当波束在阵列法线方向时，波束最窄，越偏离法线方向主瓣展宽的越厉害。

■ 零点波束宽度为：

$$\theta_{NN} = \arcsin\left(\frac{2\lambda}{Nd}\right)$$

——→ 零陷位置不仅与孔径有关，还与频率位置有关。

■ 在波束扫到 $\bar{\theta}_{\max}$ 时仍不出现栅瓣的条件是：

$$d < \frac{m\lambda}{1 + |\sin \bar{\theta}_{\max}|}$$



传统波束形成器的设计

● 单通道复数加权向量 \longrightarrow (窄带) 空域滤波器

■ 阵列构形: 共形阵、平面阵、线阵、均匀线阵

■ 方向图形成: 移相器 + 加权幅度控制 \rightarrow 二者级联

✧ 阵列定向: 控制加权矢量的时延/相位 \longrightarrow 经典波束形成器 $\mathbf{w} = \frac{1}{N} \mathbf{v}(\mathbf{k}_d)$

$$B(\mathbf{k} : \mathbf{k}_d) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\mathbf{k}_d) \mathbf{v}(\mathbf{k}) \longrightarrow \text{空间匹配滤波}$$

✧ 旁瓣控制: 控制加权矢量的幅度

● 多通道抽头延迟线 \longrightarrow (宽带) 时空滤波器: 宽带信号处理、时空滤波 (多径补偿)



传统窄带波束形成器的几种合成方法

旁瓣控制方法

■ 谱加权：根据旁瓣电平的设计要求选择最接近的窗函数。

■ *Dolph—Chebychev* 加权/*Taylor* 加权：指定旁瓣最小波束宽度

期望天线方向图设计方法

■ Woodward 采样法：基于频率波数响应与孔径加权函数之间的关系：

$$B(u) = \mathbf{w}^H \cdot \mathbf{v}(u) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(k - \frac{N-1}{2})\pi u} \cdot w_n^*$$

■ 最小方差方法：期望的天线方向图为 $B_d(\psi)$ 的最小方差逼近

特殊天线方向图设计

■ 椭球函数：是使在一个给定角度区域内的总功率比例最大

■ 形成零陷：在原期望天线方向图上加入若干零陷限制

